Аналогии в задачах по физике

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

Довольно часто при решении задачи обнаруживается, что она аналогична какой-то другой, уже решенной, причем степени близости задач могут быть весьма разнообразными. Заметив аналогию новой и старой задач, мы получаем дополнительный шанс на успех в поисках решения новой. В этом смысле «рассуждение по аналогии» является одним из методов решения задач (наряду с такими, как соображения симметрии или размерностей, преобразования системы отсчета, использование графиков или векторных диаграмм и т.п.).

В качестве примеров рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Поршневым воздушным насосом откачивают воздух из сосуда объемом V. Рабочий объем камеры насоса V_0. Во сколько раз уменьшится давление в сосуде после n ходов поршня? Переход воздуха из сосуда в камеру насоса считайте изотермическим процессом.*

В каждом цикле работы насоса будем различать два процесса: один – это изотермическое расширение воздуха от объема V до объема $V + V_0$, другой – освобождение камеры насоса от воздуха, оказавшегося в ней в конце первого процесса.

В соответствии с уравнением Менделеева—Клапейрона, число молей воздуха, производящего в объеме V давление p при температуре T, равно

$$\nu = \frac{pV}{RT},$$

где R – универсальная газовая постоянная. В первом акте расширения воздуха условие сохранения количества молей воздуха с учетом постоянства температуры можно описать уравнением

$$pV = p_1\left(V + V_0\right).$$

После удаления воздуха из камеры насоса и возврата поршня в исходное положение произойдет второе расширение оставшегося в сосуде воздуха:

$$p_1V = p_2\left(V + V_0\right),$$

затем третье, четвертое... и, наконец, n-е расширение воздуха:

$$p_{n-1}V = p_n\left(V + V_0\right).$$

Перемножив соответственно левые и правые части этих n уравнений, получим

$$pV^n = p_n\left(V + V_0\right)^n.$$

Отсюда после простых преобразований окончательно находим ответ на вопрос задачи:

$$\frac{p}{p_n} = \left(1 + \frac{V_0}{V}\right)^n.$$

Задача 2. *Конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U и отсоединен от источника. К этому конденсатору подключают незаряженный конденсатор емкостью C_0. Когда заканчивается перераспределение зарядов, зарядившийся второй конденсатор (емкостью C_0) отсоединяют от первого конденсатора (емкостью C). Затем к первому конденсатору присоединяют следующий незаряженный конденсатор емкостью C_0 и т.д. Во сколько раз уменьшится напряжение на конденсаторе емкостью C после n подключений конденсаторов емкостью C_0?*

Эта задача аналогична предыдущей, и ответ, по-видимому, тоже аналогичен предыдущему:

$$\frac{U}{U_n} = \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)^n.$$

Проверим это, проведя подробное решение.

В первом акте происходит «расселение» исходного заряда по двум параллельно соединенным конденсаторам. При этом заряд сохраняется, поэтому можно записать

$$CU = \left(C + C_0\right)U_1.$$

Во втором акте «расселению» подвергается заряд CU_1:

$$CU_1 = \left(C + C_0\right)U_2,$$

и так далее. Наконец, n-й акт описывается соотношением

$$CU_{n-1} = \left(C + C_0\right)U_n.$$

Перемножив соответствующим образом эти равенства друг на друга, получим

$$C^nU = \left(C + C_0\right)^nU_n,$$

или (после простых преобразований)

$$\frac{U}{U_n} = \left(1 + \frac{C_0}{C}\right)^n.$$

Таким образом, сравнивая эти две задачи, можно заключить, что похожие процессы, хотя и имеют различную физическую природу, описываются сходной математикой и имеют ответы на аналогичные вопросы в виде совпадающих математических конструкций. Более того, аналогичными оказываются отношения p/p_n и U/U_n, а также V_0/V и C_0/C.

Задача 3. *Тонкий обруч массой m и радиусом R вращается равномерно вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр и перпендикулярной его плоскости, с частотой n. Найдите величину силы натяжения, возникающей в обруче.*

При раскручивании обруча до частоты n он слегка деформируется (увеличивается его длина), и возникает сила натяжения. На рисунке 1 выделен малый участок кольца, на концы которого действуют две силы натяжения, величиной T каждая. Длина участка равна $R \cdot 2\Delta\alpha$. При достаточно малом угле $\Delta\alpha$ участок можно считать материальной точкой массой $m\left(R \cdot 2\Delta\alpha\right)/\left(2\pi R\right)$, движущейся по окружности с линейной скоростью $2\pi Rn$ и центростремительным ускорением $a = \left(2\pi Rn\right)^2/R$ под действием радиальных составляю-

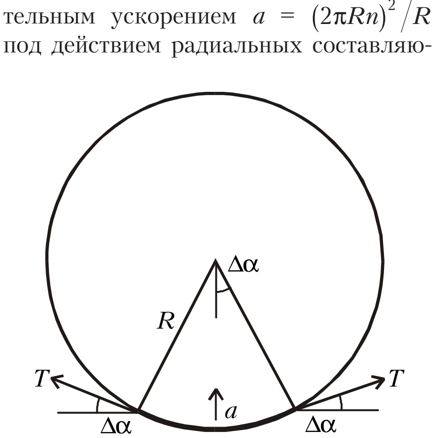

Рис. 1

щих двух сил натяжения, равных в сумме $2T\Delta\alpha$. Таким образом, в соответствии со вторым законом Ньютона, в проекции на радиальное направление имеем

$$\left(\frac{m}{2\pi R} R \cdot 2\Delta\alpha\right) \frac{(2\pi R n)^2}{R} = 2T\Delta\alpha,$$

откуда получаем

$$T = 2\pi R n^2 m.$$

Задача 4. *Тонкое проводящее кольцо радиусом R, по которому течет ток I, расположено в однородном магнитном поле с индукцией* $\vec{B}$, *причем вектор поля перпендикулярен плоскости кольца. Найдите величину силы натяжения, возникающей в кольце.*

На рисунке 2 выделен элементарный участок кольца длиной $R \cdot 2\Delta\alpha$ с током I в магнитном поле, причем вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен к читателю. В соответствии с законом Ампера, участок испытывает со стороны магнитного поля действие силы, равной $\Delta F = I(R \cdot 2\Delta\alpha)B$ и направленной так, как показано на рисунке 2. Обратим внимание на то, что закон Ампера применим только к прямолинейному отрезку проводника с током, так что мы должны потребовать, чтобы угол $\Delta\alpha$ был мал. Учитывая, что выделенный участок кольца покоится, из

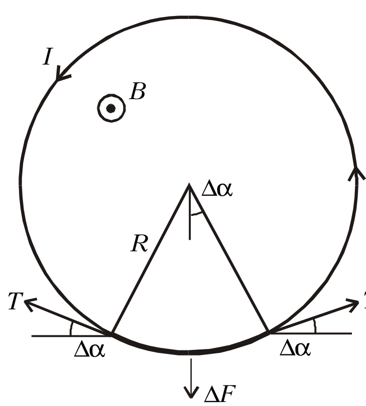

Рис. 2

второго закона Ньютона в проекции на радиальное направление имеем

$$0 = 2T\Delta\alpha - I(R \cdot 2\Delta\alpha)B,$$

откуда

$$T = IRB.$$

По-видимому, родственный характер явлений, рассматриваемых в задачах 3 и 4, не так очевиден, как в задачах 1 и 2, но структура решений двух последних задач делает их близкими.

Аналогию, обнаруживаемую при сравнении рисунков 1 и 2, можно усилить, если задачу 3 решать в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вокруг центра обруча, так что в этой системе обруч покоится. Тогда кроме сил натяжения, показанных на рисунке 1, на участок обруча будет действовать еще центробежная сила инерции $\Delta\vec{F}$, направленная против вектора ускорения $\vec{a}$ и равная по величине $\Delta m a$, т.е.

$$\left(\frac{m}{2\pi R} R \cdot 2\Delta\alpha\right) \frac{(2\pi R n)^2}{R}.$$

Картина сил качественно совпадает с показанной на рисунке 2. Более того, как и в задаче 4, соответствующий участок обруча теперь покоится. Таким образом, сменив систему отсчета, мы усилили аналогию.

Сравнивая ответы в задачах 3 и 4, можно также обнаружить некие соответствия: совсем понятное $R \leftrightarrow R$, вызывающее сочувствие $nm \leftrightarrow I$ и загадочное $2\pi n \leftrightarrow B$.

Задача 5. *Покажите, что минимальная работа по зарядке первоначально незаряженного конденсатора равна* $QU(Q)/2$. *Здесь Q и U(Q) – окончательные заряд конденсатора и напряжение между его пластинами.*

На рисунке 3 изображен график зависимости напряжения на конденсаторе от величины его заряда. В соответствии с определением электрической емкости,

$$U(q) = \frac{1}{C} q.$$

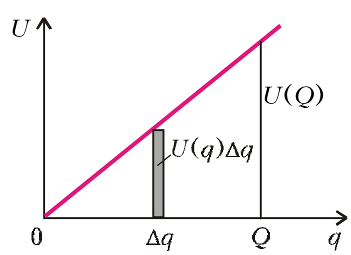

Рис. 3

Из графика видно, что величина U, численно равная работе внешней силы по переносу единичного положительного заряда с отрицательно заряженной пластины конденсатора на положительно заряженную, тем больше, чем больше заряд q конденсатора. Работа по дополнительной зарядке конденсатора от заряда q до $q + \Delta q$ равна $U(q)\Delta q$ – на рисунке 3 площадь соответствующего прямоугольника выделена. Наконец, работа по зарядке конденсатора от $q = 0$ до $q = Q$ может быть найдена как сумма произведений $U(q)\Delta q$, т.е. как площадь прямоугольного треугольника с катетами Q и $U(Q)$:

$$A = \frac{1}{2} Q U(Q).$$

Задача 6. *Покажите, что минимальная работа по строительству вертикальной однородной колонны массой m и высотой H из материала, первоначально расположенного в тонком слое на горизонтальной плоскости, совпадающей с основанием колонны, равна* $mgH/2$, *где g – ускорение свободного падения. Площадь поперечного сечения колонны одинакова по всей высоте.*

Известно, что формула mgh позволяет найти потенциальную энергию небольшого тела массой m, поднятого на высоту h над нулевым уровнем, от которого отсчитывается потенциальная энергия. Соответственно, величина gh может рассматриваться как минимальная работа по поднятию на высоту h единичной массы.

Пусть ρ – плотность материала, из которого строится колонна:

$$\rho = \frac{m}{SH},$$

где S – площадь поперечного сечения колонны. На рисунке 4 представлен график зависимости величины gh от массы колонны (в процессе ее строительства) $\rho S h$. График показывает, что чем больше высота, а значит, и масса $\rho S h$ уже построенной части колонны, тем большую работу gh следует совер-

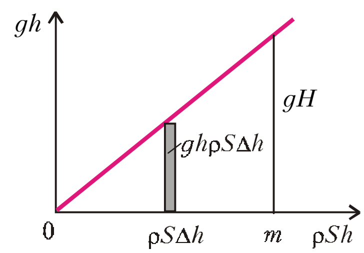

Рис. 4

шить по подъему очередной единичной массы. Работа по увеличению высоты колонны от h до $h + \Delta h$ равна $gh \cdot \rho S \Delta h$ – на рисунке 4 площадь соответствующего прямоугольника выделена. Наконец, работу по строительству всей колонны можно найти как площадь прямоугольного треугольника с катетами m и gH:

$$A = \frac{1}{2} mgH.$$

В задачах 5 и 6 аналогичны структуры мысленных экспериментов по зарядке конденсатора и сооружению колонны; аналогичны также методы решения и структуры ответов.

Задача 7. *Два тела массами* m_1 *и* m_2 *движутся со скоростями* $\vec{v}_1$ *и* $\vec{v}_2$. *Происходит абсолютно неупругий удар, в результате которого тела объединяются. Сколько тепла выделится в результате удара?*

Запишем закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v},$$

где $\vec{v}$ – скорость образовавшегося тела, и закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}+Q.$$

Перейдя от векторных уравнений к скалярным, после простых преобразований находим выделившееся количество теплоты:

$$Q=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}(v_1-v_2)^2.$$

Задача 8. *Два небольших проводящих шарика радиусами R_1 и R_2, заряженные до потенциалов φ_1 и φ_2 соответственно, находятся далеко друг от друга. Сколько тепла выделится через достаточно большое время после соединения шариков друг с другом длинной проволокой?*

Будем считать известным, что потенциал φ заряженного шарика связан с его зарядом q формулой

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R},$$

где ε_0 – электрическая постоянная. Закон сохранения заряда для рассматриваемого процесса соединения шариков запишем в виде

$$4\pi\varepsilon_0R_1\varphi_1+4\pi\varepsilon_0R_2\varphi_2=4\pi\varepsilon_0R_1\varphi+4\pi\varepsilon_0R_2\varphi,$$

где φ – окончательный потенциал шариков и соединяющей их проволоки. Рассматривая шарик как конденсатор (второй обкладкой служит концентрическая с шариком сфера бесконечного радиуса) емкостью $4\pi\varepsilon_0R$, можно подсчитать энергию шарика, заряженного до потенциала φ, по формуле $C\varphi^2/2$ (потенциал в бесконечности принят за ноль). С учетом этих соображений, закон сохранения энергии перепишем так:

$$\frac{4\pi\varepsilon_0R_1\varphi_1^2}{2}+\frac{4\pi\varepsilon_0R_2\varphi_2^2}{2}=\frac{4\pi\varepsilon_0R_1\varphi^2}{2}+\frac{4\pi\varepsilon_0R_2\varphi^2}{2}+Q.$$

Отсюда и из закона сохранения заряда после простых преобразований находим выделившееся количество теплоты:

$$Q=\frac{1}{2}\cdot4\pi\varepsilon_0\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}(\varphi_1-\varphi_2)^2.$$

Математическая структура окончательных формул в задачах 7 и 8 одна и та же, и это связано, видимо, с аналогией использованных при решении двух законов сохранения – заряда и импульса.

Задача 9. *Легкий стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. К концам стержня прикреплены небольшие тела массами m_1 и m_2. Стержень удерживают в горизонтальном положении. Какие ускорения возникнут у каждого из тел сразу (в первый момент) после того, как стержень отпустят и у него появится возможность вращаться вокруг оси? Найдите также величину силы давления оси на стержень в этот момент времени.*

На рисунке 5 показаны силы, действующие на стержень и на каждое из

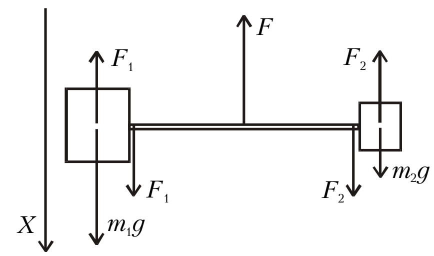

Рис. 5

прикрепленных к нему тел в интересующий нас момент времени. Запишем уравнения движения для тел массами m_1 и m_2 в проекции на ось X:

$$m_1a_{1x}=m_1g-F_1,$$

$$m_2a_{2x}=m_2g-F_2.$$

Уравнение моментов для стержня, с учетом равенства расстояний от каждого из тел до оси вращения и невесомости стержня, приводит к равенству

$$F_1=F_2.$$

Равноудаленность тел от оси вращения и недеформируемость стержня делают справедливым соотношение

$$a_{1x}=-a_{2x}.$$

Второй закон Ньютона, примененный к легкому стержню, дает равенство

$$F=F_1+F_2.$$

Решая систему записанных пяти уравнений, находим все искомые величины:

$$a_{1x}=-a_{2x}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g,$$

$$F=\frac{4m_1m_2g}{m_1+m_2}.$$

Задача 10. *На концах легкой нити, переброшенной через легкий блок, который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, прикреплены тела массам и m_1 и m_2. Найдите ускорения каждого из тел, а также величину силы давления оси на блок.*

Очевидно, что рисунок, который следовало бы сделать к этой задаче, полностью совпал бы с рисунком 5, только стержень пришлось бы заменить блоком, диаметр которого равен длине стержня. Весь текст решения задачи 9 тоже может быть использован и в этой задаче. Совпадают, конечно же, и ответы. Единственное и принципиально важное отличие состоит в том, что полученные ответы в задаче 9 применимы только к первому моменту, а в задаче 10 – ко всему времени движения тел.

Таким образом, задачи 9 и 10 демонстрируют весьма своеобразное родство.

Упражнения

1. Тонкое кольцо радиусом R однородно заряжено с положительной линейной плотностью заряда λ. В центре кольца покоится большой точечный положительный заряд q. Найдите величину силы натяжения кольца, вызванной взаимодействием заряженного кольца с точечным зарядом. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона считать равным k.

2. На мыльной пленке плавает петля из нити. Часть пленки, находившуюся внутри нити, осторожно прокалывают, и нить принимает форму окружности радиусом R. Найдите величину силы натяжения нити, если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен σ.

3. К заряженному конденсатору, обладающему энергией W_0, присоединяют такой же, но незаряженный конденсатор. На сколько изменится энергия системы конденсаторов?

4. В одно из двух колен U-образной трубки налита жидкость. Вначале колена не сообщаются друг с другом, и энергия жидкости в поле тяжести равна W_0. На сколько изменится энергия жидкости, когда сообщение колен установится и уровень жидкости в них станет одним и тем же?

5. Шарик, имевший кинетическую энергию W_0, сталкивается вдоль линии центров абсолютно неупруго с другим таким же, но покоившимся шариком. На сколько изменится кинетическая энергия системы шариков в результате удара?