МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Метаморфозы последовательностей

С.КОНОВАЛОВ

ЕСЛИ Холмс и Ватсон, пробираясь через Гримпенскую трясину, прыгают по кочкам, то такая «дискретизация» их пути вполне объяснима. Но когда идущие по гладкому аэродромному полю, замощенному бетонными плитами, стараются наступать (или не наступать) на линии стыковки этих плит, то объяснить это рационально значительно сложнее (в некоторых странах нежелание наступить на линию и стремление избежать встречи с черной кошкой – явления одного ряда).

Аналогичным магическим воздействием обладают последовательности, т.е. функции натурального аргумента: возникает желание изучать эту функцию, «прыгая» от точки к точке и не замечая, что вокруг — числовая прямая, по которой можно «ходить»! Но для изучения функций, определенных только на множестве натуральных чисел, у нас нет мощных инструментов в виде теорем дифференциального и интегрального исчисления, поэтому непосредственное изучение последовательностей (конечных или бесконечных) часто становится весьма трудным делом.

С другой стороны, если для данной последовательности a_n ($n = 1, 2, \ldots$) мы подберем функцию $a(x)$, определенную при всех $x > 0$ и такую, что $a(n) = a_n$ для каждого натурального n, то изучив функцию $a(x)$ «целиком», мы узнаем и то, как она ведет себя в целочисленных точках. Конечно, чтобы для анализа свойств функции $a(x)$ можно было применять соответствующие теоремы, она должна быть достаточно «хорошей», например, непрерывной или имеющей производную в каждой точке.

Подобрать функцию, определяемую не очень сложной формулой, не всегда легко, хотя непрерывных линий, проходящих через точки $(n; a_n)$ на координатной плоскости, бесконечно много.

В простейших случаях достаточно заменить n на x: например, последовательности $a_n = \sqrt{n^2+1}$ соответствует функция $a(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Для последовательности $a_n = (-1)^n$ подобная замена невозможна, но предварительное преобразование $(-1)^n =$

$= \cos\pi n$ позволяет и здесь найти простую формулу: $a(x) = \cos\pi x$.

А для внешне простой последовательности $a_n = n!$ один из «лучших» непрерывных двойников выглядит так:

$$a(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,dt.$$

Эта функция, носящая имя Эйлера, играет особую роль в математике.

В этой статье мы разберем несколько примеров, демонстрирующих пользу, которую приносит переход от изучения последовательности к изучению непрерывной функции.

Производная помогает изучать последовательность

Построение непрерывного двойника с «точным» свойством $a(n) = a_n$ является естественным, например, при решении задачи о нахождении наибольшего или наименьшего члена последовательности.

Пример 1. Найдите наибольший член последовательности $a_n = \dfrac{n-1}{n^2-n+7}$.

Решение. Рассмотрим функцию $a(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x+7}$, $x > 0$. Найдя производную $a'(x) = \dfrac{-x^2+2x+6}{\left(x^2-x+7\right)^2}$, мы видим, что функция возрастает при $0 < x < 1+\sqrt{7}$, убывает при $x > 1+\sqrt{7}$ и имеет в точке $x_0 = 1+\sqrt{7}$ локальный максимум (рис.1).

Так как $1+\sqrt{7} \approx 3{,}6$, то для определения наибольшего члена последовательности надо сравнить два числа: $a(3)$ и $a(4)$. Поскольку $a(3) = \dfrac{2}{13} < a(4) = \dfrac{3}{19}$, наибольшим членом последовательности является $a_4 = \dfrac{3}{19}$.

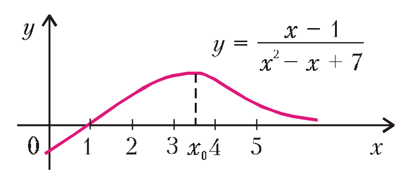

Рис. 1

Ответ. $a_4 = \dfrac{3}{19}$.

Задачи типа разобранной часто являются составной частью задач, в которых надо оптимально выбрать дискретно меняющийся параметр. В качестве примера предлагаем решить задачу, предлагавшуюся на вступительных экзаменах в МФТИ в 1992 году.

Упражнение 1. На берегу реки шириной $8l$ вниз по течению на расстоянии l друг от друга расположены пункты $П_0$, $П_1$, …, $П_{100}$. От $П_0$ до $П_{100}$ со скоростью $6v$ и с остановками только в пунктах $П_0$, …, $П_{100}$ идут автобусы, которые отправляются из $П_0$ один за другим с интервалом времени $\dfrac{l}{10v}$. Турист, находящийся на противоположном берегу реки напротив $П_0$, отплывает в лодке одновременно с отправлением из $П_0$ очередного автобуса. Доплыв по прямой до одного из пунктов, турист добирается до $П_{100}$ на автобусе. Скорость течения реки и скорость лодки в стоячей воде равны v. В какой пункт должен плыть турист, чтобы затратить на весь путь до $П_{100}$ наименьшее время? Найдите все решения. (Временем стоянки автобусов можно пренебречь.)

Интеграл вместо суммы

Известно, что при каждом натуральном k сумма

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$$

может быть представлена как многочлен от n степени $k+1$ (см. [1], [2]).

Читатель, видимо, знаком с формулами, позволяющими вычислять $S_k(n)$ при небольших значениях k:

$$S_1(n) = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

— это частный случай формулы суммы для первых n членов арифметической прогрессии;

$$S_2(n) = 1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$S_3(n) = 1^3+2^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Приведенные формулы легко доказываются методом математической индукции, но такой подход оставляет невыясненным то, как появились эти формулы.

В этом разделе мы разберем доказательство общего утверждения, которое будет конструктивным и позволит находить коэффициенты многочлена $S_k(n)$ для любого заданного значения k.

Основную идею хорошо видно на примере вычисления $S_1(n)$. На рисунке 2 изображены прямоугольники, сумма площадей которых равна $1+2+\ldots+n = S_1(n)$.

Очевидно, что площадь трапеции, ограниченной прямыми $y=0$, $y = x+\dfrac{1}{2}$,

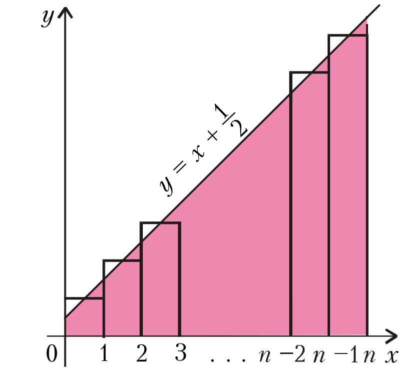

Рис. 2

$x = n-1$ и $x = n$, равна площади прямоугольника, основанием которого служит отрезок $[n-1; n]$, а высота равна n, т.е.

$$\int_{n-1}^{n}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = n$$

при любом натуральном n.

Следовательно,

$$1+2+\ldots+n = \sum_{m=1}^{n}\int_{m-1}^{m}\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \int_0^n\left(x+\frac{1}{2}\right)dx = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}.$$

Если аналогичным образом нам удастся для каждого значения k найти многочлен $P_k(x)$ степени k такой, что равенство

$$\int_{n-1}^{n} P_k(x)\,dx = n^k$$

справедливо при каждом натуральном n, то будет решена и задача о представлении $S_k(n)$ в виде многочлена от n степени $k+1$: тогда

$$S_k(n) = \int_0^n P_k(x)\,dx.$$

Покажем, что такой многочлен $P_k(x)$ существует и определен единственным образом. Пусть

$$P_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Условие

$$n^k = \int_{m-1}^{n} P_k(x)\,dx = \frac{a_0}{k+1}\left(n^{k+1}-(n-1)^{k+1}\right) + \frac{a_1}{k}\left(n^k-(n-1)^k\right) + \ldots + a_k$$

выполняется при всех натуральных n

лишь в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях и в левой и правой частях равны (мы пользуемся постоянно применяемым при работе с многочленами утверждением: если многочлен степени k обращается в нуль при $k+1$ различных значениях независимой переменной, то этот многочлен является нулевым).

В силу формулы бинома Ньютона

$$n^m-(n-1)^m = mn^{m-1}-\frac{m(m-1)}{2}n+\ldots+(-1)^{m-1},$$

поэтому для определения коэффициентов a_0, a_1, ..., a_k получаем линейную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0=1,\\ -\dfrac{k}{2}a_0+a_1=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{(-1)^k}{k+1}a_0+\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}a_1+\ldots+a_k=0.\end{cases}$$

В уравнении с номером m ($m = 1, 2, \ldots, k+1$) содержатся неизвестные a_0, a_1, ..., a_{m-1}, причем коэффициент при a_{m-1} равен 1. Из первого (верхнего) уравнения системы находим $a_0=1$, из второго — $a_1=\frac{k}{2}$ и т.д. При переходе сверху вниз к очередному уравнению с номером m мы получаем соотношение, в котором a_0, a_1, ..., a_{m-2} уже найдены, а a_{m-1} определяется однозначно, так как коэффициент при a_{m-1} равен 1 (главное, что он не равен нулю). Следовательно, система имеет решение и притом единственное, что доказывает существование многочлена $P_k(x)$.

Пример 2. Найдите формулу для суммы $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

Решение. Действуя по общей схеме, ищем многочлен

$$P_3(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

удовлетворяющий условию

$$\int_{n-1}^{n}P_k(x)dx=n \text{ при } n=1,\ 2,\ \ldots$$

Имеем:

$$\frac{a_0}{4}\left(4n^3-6n+4n-1\right)+\frac{a_1}{3}\left(3n^2-3n+1\right)+\frac{a_2}{2}(2n-1)+a_3=n^3,$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} a_0=1,\\ -\dfrac{3}{2}a_0+a_1=0,\\ a_0-a_1+a_2=0,\\ -\dfrac{1}{4}a_0+\dfrac{1}{3}a_1-\dfrac{1}{2}a_2+a_3=0.\end{cases}$$

Отсюда последовательно находим: $a_0=1$, $a_1=\frac{3}{2}$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=0$. Следовательно,

$$P_3(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$$

а

$$S_3(n)=\int_0^n P_3(x)dx=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Упражнение 2. Найдите формулу для суммы $1^4+2^4+\ldots+n^4$.

Упражнение 3. Докажите, что при любом натуральном k свободный член многочлена $S_k(n)$ равен нулю.

Упражнение 4. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

Идея замены сумм площадей прямоугольников интегралом от некоторой непрерывной функции применяется и при решении следующей задачи.

Пример 3. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k$.

Решение. Подберем такую непрерывную функцию $f(x)$, что равенство

$$\int_{n-1}^{n}f(x)dx=\cos n$$

выполняется при всех натуральных n. Учитывая вид правой части последнего равенства, естественно искать $f(x)$ в виде гармоники

$$f(x)=A\cos(x+\alpha).$$

Равенство

$$0=\int_{n-1}^{n}A\cos(x+\alpha)dx-\cos n=$$

$$=A\sin(n+\alpha)-A\sin(n+\alpha-1)-\cos n=$$

$$=A\sin n\cos\alpha+A\cos n\sin\alpha-A\sin n\cos(\alpha-1)-A\cos n\sin(\alpha-1)-\cos n$$

будет справедливым при всех n, если коэффициенты при $\cos n$ и $\sin n$ равны нулю. Это условие дает систему уравнений

$$\begin{cases} A\sin\alpha-A\sin(\alpha-1)-1=0,\\ A\cos\alpha-A\cos(\alpha-1)=0.\end{cases}$$

Так как $A\neq 0$, то из второго уравнения находим: $\alpha=\frac{1}{2}+\pi m$, $m\in\boldsymbol{Z}$. Нас устраивает любое решение системы, поэтому возьмем $\alpha=\frac{1}{2}$, тогда из первого уравнения получим, что $A=\dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}}$. Следовательно, нам подходит функция

$$f(x)=\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k=\int_0^n\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}.$$

Ответ. $\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}$.

Отметим, что разобранная задача имеет и другие решения, но в этом разделе все задачи мы решаем только одним способом.

Упражнение 5. Найдите сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k\cos k$.

Литература

1. *Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М.: Физматлит, 1965.

2. *В.А.Кречмар.* Задачник по алгебре. – М.: Физматлит, 1964.