

где \vec{v} – скорость образовавшегося тела, и закон сохранения энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + Q.$$

Перейдя от векторных уравнений к скалярным, после простых преобразований находим выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2.$$

Задача 8. Два небольших проводящих шарика радиусами R_1 и R_2 , заряженные до потенциалов ϕ_1 и ϕ_2 соответственно, находятся далеко друг от друга. Сколько тепла выделится через достаточно большое время после соединения шариков друг с другом длинной проволокой?

Будем считать известным, что потенциал ϕ заряженного шарика связан с его зарядом q формулой

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R},$$

где ϵ_0 – электрическая постоянная. Закон сохранения заряда для рассматриваемого процесса соединения шариков запишем в виде

$$4\pi\epsilon_0 R_1 \phi_1 + 4\pi\epsilon_0 R_2 \phi_2 = 4\pi\epsilon_0 R_1 \phi + 4\pi\epsilon_0 R_2 \phi,$$

где ϕ – окончательный потенциал шариков и соединяющей их проволоки. Рассматривая шарик как конденсатор (второй обкладкой служит концентрическая с шариком сфера бесконечного радиуса) емкостью $4\pi\epsilon_0 R$, можно подсчитать энергию шарика, заряженного до потенциала ϕ , по формуле $C\phi^2/2$ (потенциал в бесконечности принят за ноль). С учетом этих соображений, закон сохранения энергии перепишем так:

$$\frac{4\pi\epsilon_0 R_1 \phi_1^2}{2} + \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 \phi_2^2}{2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 \phi^2}{2} + \frac{4\pi\epsilon_0 R_2 \phi^2}{2} + Q.$$

Отсюда и из закона сохранения заряда после простых преобразований находим выделившееся количество теплоты:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} (\phi_1 - \phi_2)^2.$$

Математическая структура окончательных формул в задачах 7 и 8 одна и та же, и это связано, видимо, с аналогией использованных при решении двух законов сохранения – заряда и импульса.

Задача 9. Легкий стержень может вращаться без трения вокруг горизон-

тальной оси, проходящей через его середину. К концам стержня прикреплены небольшие тела массами m_1 и m_2 . Стержень удерживают в горизонтальном положении. Какие ускорения возникнут у каждого из тел сразу (в первый момент) после того, как стержень отпустят и у него появится возможность вращаться вокруг оси? Найдите также величину силы давления оси на стержень в этот момент времени.

На рисунке 5 показаны силы, действующие на стержень и на каждое из

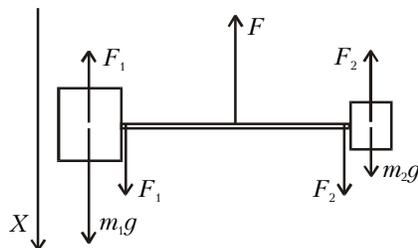


Рис. 5

прикрепленных к нему тел в интересующий нас момент времени. Запишем уравнения движения для тел массами m_1 и m_2 в проекции на ось X:

$$m_1 a_{1x} = m_1 g - F_1, \\ m_2 a_{2x} = m_2 g - F_2.$$

Уравнение моментов для стержня, с учетом равенства расстояний от каждого из тел до оси вращения и невесомости стержня, приводит к равенству

$$F_1 = F_2.$$

Равноудаленность тел от оси вращения и недеформируемость стержня делают справедливым соотношение

$$a_{1x} = -a_{2x}.$$

Второй закон Ньютона, примененный к легкому стержню, дает равенство

$$F = F_1 + F_2.$$

Решая систему записанных пяти уравнений, находим все искомые величины:

$$a_{1x} = -a_{2x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \\ F = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Задача 10. На концах легкой нити, переброшенной через легкий блок, который может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, прикреплены тела массами m_1 и m_2 . Найдите ускорения каждого из тел, а также величину силы давления оси на блок.

Очевидно, что рисунок, который следовало бы сделать к этой задаче, полностью совпал бы с рисунком 5, только стержень пришлось бы заменить блоком, диаметр которого равен длине стержня. Весь текст решения задачи 9 тоже может быть использован и в этой задаче. Совпадают, конечно же, и ответы. Единственное и принципиально важное отличие состоит в том, что полученные ответы в задаче 9 применимы только к первому моменту, а в задаче 10 – ко всему времени движения тел.

Таким образом, задачи 9 и 10 демонстрируют весьма своеобразное родство.

Упражнения

1. Тонкое кольцо радиусом R однородно заряжено с положительной линейной плотностью заряда λ . В центре кольца покоится большой точечный положительный заряд q . Найдите величину силы натяжения кольца, вызванной взаимодействием заряженного кольца с точечным зарядом. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона считать равным k .

2. На мыльной пленке плавает петля из нити. Часть пленки, находившаяся внутри нити, осторожно прокалывают, и нить принимает форму окружности радиусом R . Найдите величину силы натяжения нити, если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен σ .

3. К заряженному конденсатору, обладающему энергией W_0 , присоединяют такой же, но незаряженный конденсатор. На сколько изменится энергия системы конденсаторов?

4. В одно из двух колен U-образной трубки налита жидкость. Вначале колена не сообщаются друг с другом, и энергия жидкости в поле тяжести равна W_0 . На сколько изменится энергия жидкости, когда сообщенные колена установятся и уровень жидкости в них станет одним и тем же?

5. Шарик, имевший кинетическую энергию W_0 , сталкивается вдоль линии центров абсолютно неупруго с другим таким же, но покоившимся шариком. На сколько изменится кинетическая энергия системы шариков в результате удара?