Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января1999 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1651» или «Ф1658». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1652 — М1660 предлагались на Всероссийской математической олимпиаде. Задачи Ф1658 – Ф1667, кроме Ф1663, предлагались на Соросовской физической олимпиаде.

Задачи М1651 — М1660, Ф1658 — Ф1667

М1651. Найдите а) наименьшую, б) наибольшую возможную площадь выпуклой фигуры, все проекции которой на оси Ox, Oy и прямую $x = y$ суть отрезки единичной длины.

В.Тиморин

М1652. Внутри параболы $y = x^2$ расположены окружности ω_1, ω_2, ω_3, ... так, что каждая окружность ω_{n+1} касается ветвей параболы и внешним образом – окружности ω_n (рис.1). Найдите радиус окружности ω_{1998}, если известно, что диаметр окружности ω_1 равен 1 и она касается параболы в ее вершине.

М.Евдокимов

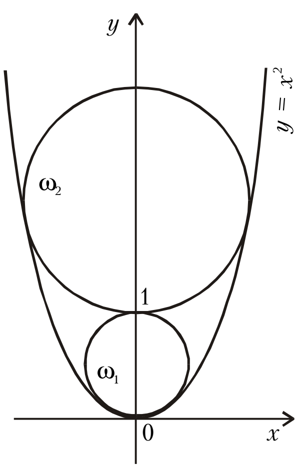

Рис.1

М1653. На столе лежат 5 часов со стрелками. Разрешается любые из них перевести вперед. Для каждых часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

О.Подлипский

М1654. Через основания L и M биссектрисы BL и медианы BM неравнобедренного треугольника ABC провели прямые параллельно, соответственно, сторонам BC и BA до пересечения с прямыми BM и BL в точках D и E. Докажите, что угол BDE прямой.

М.Сонкин

М1655. Существуют ли 1998 различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых делится нацело на квадрат их разности?

Г.Гальперин

М1656. Даны два выпуклых многоугольника. Известно, что расстояние между любыми двумя вершинами первого не больше 1, расстояние между любыми двумя вершинами второго также не больше 1, а расстояние между любыми двумя вершинами разных многоугольников больше чем $1/\sqrt{2}$. Докажите, что многоугольники не пересекаются.

В.Дольников

М1657. Назовем *лабиринтом* шахматную доску 8×8, на которой между некоторыми полями поставлены перегородки. По команде ВПРАВО ладья смещается на одно поле вправо или, если справа находится край доски или перегородка, остается на месте; аналогично выполняются команды ВЛЕВО, ВВЕРХ и ВНИЗ. Марья Ивановна пишет программу – конечную последовательность указанных команд – и дает ее Вовочке, после чего Вовочка выбирает лабиринт и помещает ладью на любое поле. Верно ли, что Марья Ивановна может программу, что ладья обойдет все доступные поля в лабиринте при любом выборе Вовочки?

В.Уфнаровский, А.Шаповалов

М1658. Обозначим $S(x)$ сумму цифр числа x. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что $S(a+b) < 5$, $S(a+c) < 5$ и $S(b+c) < 5$, но $S(a+b+c) > 50$?

С.Волченков, Л.Медников

М1659*. Фигура Φ, составленная из клеток 1×1, обладает следующим свойством: при любом заполнении клеток прямоугольника $m\times n$ числами, сумма которых положительна, фигуру Φ можно так расположить в прямоугольнике, чтобы сумма чисел в клетках прямоугольника под фигурой Φ была положительна (фигуру Φ можно поворачивать). Докажите, что данный прямоугольник может быть покрыт фигурой Φ в несколько слоев.

А.Белов

М1660*. В стране 1998 городов. Из каждого осуществляются беспосадочные авиарейсы в три других города (все рейсы двусторонние). Известно, что из любого города, сделав несколько пересадок, можно долететь до любого другого. Министерство Безопасности хочет объявить закрытыми 200 городов, никакие два из которых не соединены авиалинией. Докажите, что это можно сделать так, чтобы можно было долететь из любого незакрытого города в любой другой, не делая пересадок в закрытых городах.

Д.Карпов, Р.Карасев

Ф1658. Из четырех одинаковых тонких стержней длиной L каждый сделали ромб, скрепив их концы шарнирно (рис.2). Шарнир A закреплен, противоположный шарнир $Б$ двигают вдоль диагонали ромба с постоянным ускорением a. Вначале упомянутые противоположные вершины находятся близко друг к другу, а скорость точки $Б$ равна нулю. Какое ускорение будет иметь шарнир $В$ в тот момент, когда стержни $АВ$ и $ВБ$ составят угол 2α? Считайте движение всех точек плоским.

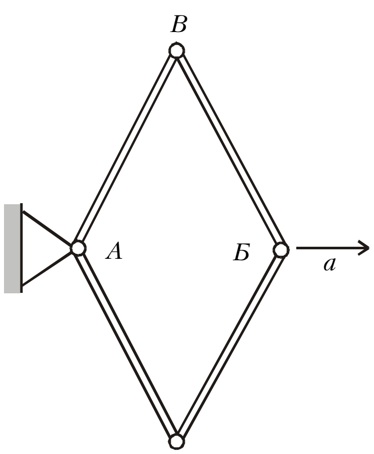

Рис.2

З.Рафаилов

Ф1659. Тележка массой m движется по горизонтально расположенным рельсам со скоростью v (рис.3). Рельсы дальше идут вниз и плавно переходят в новый горизонтальный участок, находящийся на H ниже. Тележка наезжает на неподвижный вагон массой M, стоящий на нижнем горизонтальном участке, и между тележкой и вагоном происходит абсолютно упругий удар. При какой начальной скорости v тележка после удара вновь сможет подняться на верхний горизонтальный участок? Трение отсутствует.

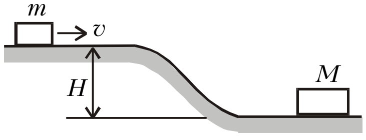

Рис.3

А.Зильберман

Ф1660. На гладкий горизонтально расположенный стержень надеты две одинаковые шайбы массой M каждая, связанные легкой нерастяжимой нитью длиной $2L$ (рис.4). К середине нити привязан груз массой $2M$, который вначале удерживают так, что нить не натянута, но практически не провисает. Груз отпускают, и система приходит в движение без рывка. Найдите максимальные значения скоростей шайб и груза в процессе движения. Ускорение свободного падения g.

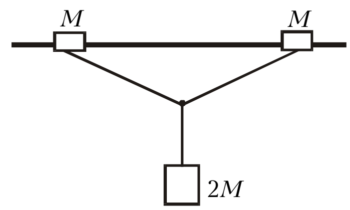

Рис.4

А.Зильберман

Ф1661. На гладком горизонтальном столе находятся три одинаковые тележки, масса каждой тележки M (рис.5). Средняя тележка связана с одной из крайних легкой нитью, а с другой – легкой пружинкой жесткостью k. Вначале систему удерживают так, что пружинка не деформирована, а нить не натянута, но практически не провисает. Толчком придадим «подпружиненной» крайней тележке скорость v вдоль прямой, соединяющей тележки, в направлении от средней. При какой длине нити удар тележек, которые были связаны этой нитью, получится громче всего? Тележки все время двигаются вдоль прямой, пружинка при деформациях подчиняется закону Гука.

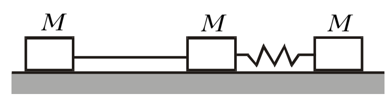

Рис.5

Р.Александров

Ф1662. В вертикальном теплоизолированном сосуде под тяжелым поршнем находится порция азота. На поршне сверху лежит груда песка, система находится в равновесии, начальный объем газа V_1, начальное давление p_1. Начнем медленно, по одной песчинке, убирать песок и уменьшим давление до p_2; при этом объем газа увеличится до V_2 (конечно, можно было этот объем вычислить, но будем считать, что это уже сделали и вам сообщили результат). Теперь проведем эксперимент иначе – снимем всю порцию песка сразу. Какую кинетическую энергию имел бы в этом случае поршень в тот момент, когда объем газа составил бы V_2? Считайте газ достаточно разреженным.

М.Учителев

Ф1663. На закрепленную тонкостенную непроводящую сферу радиусом R нанесен распределенный равномерно по поверхности заряд Q. В стенке сделано маленькое круглое отверстие площадью S. В центре сферы вначале удерживают очень маленькое по размерам массивное тело, на которое помещен заряд q того же знака, что и заряд сферы. Тело отпускают, и оно начинает двигаться под действием только электростатических сил (сила тяжести отсутствует). Объясните, почему тело будет двигаться в сторону дырки. Найдите кинетическую энергию тела, когда оно окажется в центре дырки. Точно вычислить эту энергию трудно – постарайтесь найти не слишком грубое приближение.

А.Зильберман

Ф1664. В цепи, изображенной на рисунке 6, все резисторы имеют одно и то же сопротивление. Во сколько раз изменится сопротивление цепи, измеряемое между точками *А* и *Б*, если замкнуть проводником точки *В* и *Г*?

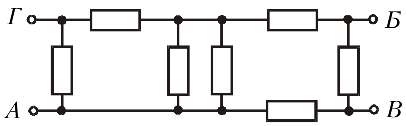

Рис.6

А.Простов

Ф1665. К батарейке напряжением 10 В подключена схема, содержащая очень большое число одинаковых ячеек. Каждая ячейка состоит из трех одинаковых вольтметров, как показано на рисунке 7. Найдите показания вольтметров в первой ячейке. Что показывают вольтметры в ячейке номер пять?

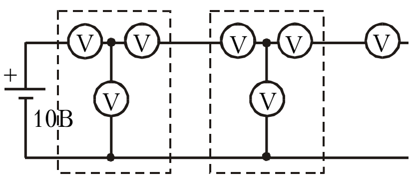

Рис.7

Р.Повторов

Ф1666. Конденсатор емкостью 1 мкФ заряжен до напряжения 4 В и подключен «минусом» к «плюсу» конденсатора емкостью 2 мкФ, заряженного до напряжения 6 В (рис.8). Параллельно конденсатору большей емкости подключают резистор сопротивлением 3 кОм, а к свободным выводам конденсаторов одновременно подключают резистор сопротивлением 10 кОм. Какое количество теплоты выделится в каждом из резисторов за большой интервал времени?

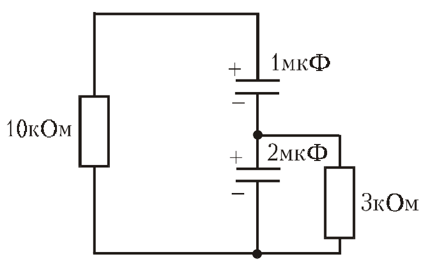

Рис.8

З.Рафаилов

Ф1667. К сети переменного напряжения частоты 50 Гц подключены последовательно конденсатор емкостью 10 мкФ и амперметр переменного тока. Последовательно с ними включают катушку. При какой индуктивности катушки показания амперметра увеличатся в два раза? При какой индуктивности показания уменьшатся в два раза? Как изменятся токи, если катушки с вычисленными вами параметрами подсоединять не последовательно, а параллельно конденсатору? Элементы цепи считать идеальными.

М.Учителев