XXIV Всероссийская математическая олимпиада школьников

Как всегда, мы публикуем материалы IV (зонального) и V (заключительного) этапов Всероссийской математической олимпиады школьников. Каждый из этапов проходил в два дня, в каждом из которых участникам предлагалось решить по четыре задачи (ниже в списках по каждому классу задачи 1—4 предлагались в первый день, а задачи 5—8 – во второй).

Задачи олимпиады

Зональный этап

8 класс

1. Существуют ли n-значные числа M и N такие, что все цифры M – четные, все цифры N – нечетные, каждая цифра от 0 до 9 встречается в десятичной записи M и N хотя бы по одному разу и M делится на N?

Н.Агаханов

2. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Могут ли лучи AM и AN делить угол BAD на три равные части?

Д.Кузнецов

3. В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

И.Изместьев

4. На плоскости дано множество из $n \geq 9$ точек. Для любых 9 его точек можно выбрать две окружности так, что все эти точки окажутся на выбранных окружностях. Докажите, что все n точек лежат на двух окружностях.

В.Дольников

5. Числа от 1 до 9 разместите в кружках фигуры (рис.1) так, чтобы сумма четырех чисел, находящихся в кружках-вершинах всех квадратов (их шесть) была постоянной.

Н.Авилов

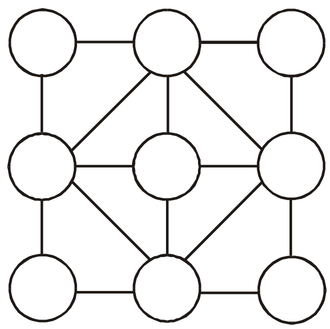

Рис. 1

6. См. задачу М1644 из «Задачника «Кванта».

7. Пусть O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, S_A, S_B, S_C – окружности с центром O, касающиеся сторон BC, CA, AB соответственно. Докажите, что сумма трех углов: между касательными к S_A, проведенными из точки A, к S_B – из точки B и к S_C – из точки C, равна 180°.

М.Сонкин

8. На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, отдает голос за себя (если он является кандидатом) и за тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается *хорошим*, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и *нехорошим* в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется *нехорошим*.

А.Разборов

9 класс

1. Длины сторон некоторого треугольника и диаметр вписанной в него окружности являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите все такие треугольники.

Я.Губин

2. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая пересекает эти окружности в точках A, B, C, D, как показано на рисунке 2. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.

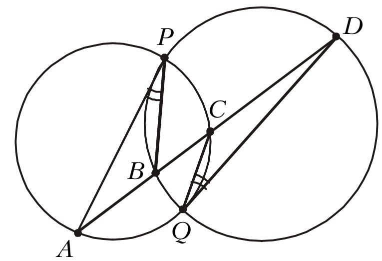

Рис. 2

3. Назовем десятизначное число интересным, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?

И.Рубанов, А.Вронецкий

4. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клетки и связная фигура неизвестной формы, состоящая из 101 клетки. Какое наибольшее число таких фигур можно с гарантией вырезать из этого квадрата? Фигура, составленная из клеток, называется связной, если любые две ее клетки можно соединить цепочкой ее клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.

И.Рубанов

5. Корни двух приведенных квадратных трехчленов – отрицательные целые числа, причем один из этих корней – общий. Могут ли значения этих трехчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98?

И.Рубанов

6. На концах клетчатой полоски размером 1×101 клеток стоят две фишки: слева фишка первого игрока, справа – второго. За ход разрешается сдвинуть свою фишку в направлении противоположного края полоски на 1, 2, 3 или 4 клетки. При этом разрешается перепрыгивать через фишку соперника, но запрещается ставить свою фишку на одну клетку с ней. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края полоски. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто ходит первым, или его соперник?

О.Подлипский

7. Дан бильярд в форме правильного 1998-угольника $A_1A_2\ldots A_{1998}$. Из середины стороны A_1A_2 выпустили шар, который, отразившись последовательно от сторон A_2A_3, A_3A_4, …, $A_{1998}A_1$ (по закону «угол падения равен углу отражения»), вернулся в исходную точку. Докажите, что траектория шара – правильный 1998-угольник.

П.Кожевников

8. Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого – квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек перемещать вторую ножку в другой узел на листе. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

Д.Храмцов

10 класс

1. Пусть $f(x) = x^2 + ax + b\cos x$. Найдите все значения параметров a и b, при которых уравнения $f(x) = 0$ и $f(f(x)) = 0$ имеют совпадающие непустые множества корней.

Н.Агаханов

2. В остроугольном треугольнике ABC через центр O описанной окружности и вершины B и C проведена окружность S. Пусть OK – диаметр окружности S, D и E – соответственно точки ее пересечения с прямыми AB и AC. Докажите, что $ADKE$ – параллелограмм.

М.Сонкин

3. Докажите, что из любого конечного множества точек на плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на два множества, диаметры которых меньше диаметра первоначального множества. (Диаметр – это максимальное расстояние между точками множества.)

В.Дольников

4. В первые 1999 ячеек памяти компьютера в указанном порядке записаны числа: 1, 2, 4, …, 2^{1998}. Два программиста по очереди уменьшают за один ход на единицу числа в пяти различных ячейках. Если в одной из ячеек появляется отрицательное число, то компьютер ломается и сломавший его оплачивает ремонт. Кто из программистов может гарантировать себя от финансовых потерь независимо от ходов партнера и как он должен для этого действовать?

Р.Женодаров

5. Решите уравнение $\left\{(x+1)^3\right\} = x^3$, $\{z\}$ – дробная часть числа z, т.е. $\{z\} = z - [z]$.

А.Шаповалов

6. В пятиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5$ проведены биссектрисы l_1, l_2, …, l_5 углов A_1, A_2, …, A_5 соответственно. Биссектрисы l_1 и l_2 пересекаются в точке B_1, l_2 и l_3 – в B_2 и т.д., l_5 и l_1 пересекаются в точке B_5. Может ли пятиугольник $B_1B_2B_3B_4B_5$ оказаться выпуклым?

Л.Смирнова, Д.Тарасенко

7. Куб со стороной n разбит перегородками на единичные кубики. Какое минимальное число перегородок между единичными кубиками нужно удалить, чтобы из каждого кубика можно было добраться до границы куба?

Д.Храмцов

8. Загадано число от 1 до 144. Разрешается выделить одно подмножество множества чисел от 1 до 144 и спросить, принадлежит ли ему загаданное число. За ответ «да» надо заплатить 2 рубля, за ответ «нет» – 1 рубль. Какая наименьшая сумма денег необходима для того, чтобы наверняка угадать число?

М.Островский

11 класс

1. Есть две колоды, из 36 карт каждая. Первую перетасовали и положили на вторую. Затем для каждой карты первой колоды посчитали количество карт между ней и такой же картой второй колоды (т.е. сколько карт между семерками червей, между дамами пик и т.д.). Чему равна сумма 36 полученных чисел?

А.Шаповалов

2. Окружность S с центром O и окружность S' пересекаются в точках A и B. На дуге окружности S, лежащей внутри S', взята точка C. Точки пересечения AC и BC с S', отличные от A и B, обозначим E и D соответственно. Докажите, что прямые DE и OC перпендикулярны.

М.Сонкин

3. См. задачу 3 для 10 класса.

4. Имеется таблица $n \times n$ ($n > 100$), в которой стоит $n-1$ единица, а в остальных клетках – нули. С ней разрешается проделывать следующую операцию: выбрать клетку, вычесть из числа, стоящего в этой клетке, единицу, а ко всем остальным числам, стоящим в одной строке или в одном столбце с выбранной клеткой, прибавить единицу. Можно ли из этой таблицы с помощью указанных операций получить таблицу, в которой все числа равны?

О.Подлипский

5. На доске записано целое число. Его последняя цифра запоминается, затем стирается и умноженная на 5 прибавляется к тому числу, что осталось на доске после стирания. Первоначально было записано число 7^{1998}. Может ли после применения нескольких таких операций получиться число 1998^7?

Л.Емельянов

6. Из бесконечной шахматной доски вырезали многоугольник со сторонами, идущими по сторонам клеток. Отрезок периметра многоугольника называется черным, если примыкающая к нему изнутри многоугольника клетка – черная, соответственно белым, если клетка белая. Пусть A — количество черных отрезков на периметре, B – количество белых и пусть многоугольник состоит из a черных и b белых клеток. Докажите, что $A - B = 4(a - b)$.

И.Изместьев

7. Даны два правильных тетраэдра с ребрами длины $\sqrt{2}$, переводящихся один в другой при центральной симметрии. Пусть Φ – множество середин отрезков, концы которых принадлежат разным тетраэдрам. Найдите объем фигуры Φ.

А.Белов

8. В последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ каждое натуральное число встречается хотя бы один раз и для любых различных n и m выполнено неравенство

$$\frac{1}{1998} < \frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < 1998.$$

Докажите, что тогда $|a_n - n| < 2\,000\,000$ для всех натуральных n.

Д.Храмцов

Заключительный этап

9 класс

1. Угол, образованный лучами $y = x$ и $y = 2x$ при $x \ge 0$, высекает на параболе $y = x^2 + px + q$ две дуги. Эти дуги спроектированы на ось Ox. Докажите, что проекция левой дуги на 1 короче проекции правой.

Жюри

2. Выпуклый многоугольник разбит на параллелограммы. Вершину многоугольника, принадлежащую только одному параллелограмму, назовем хорошей. Докажите, что хороших вершин не менее трех.

М.Смуров

3. См. задачу М1658 из «Задачника «Кванта».

4. См. задачу М1657 из «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1653 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1654 из «Задачника «Кванта».

7. Ювелир сделал незамкнутую цепочку из $N > 3$ пронумерованных звеньев. Капризная заказчица потребовала изменить порядок звеньев в цепочке. Из вредности она заказала такую незамкнутую цепочку, чтобы ювелиру пришлось раскрыть как можно больше звеньев. Сколько звеньев придется раскрыть?

А.Шаповалов

8. На доске написаны два различных натуральных числа a и b. Меньшее из них стирают и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т.д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

И.Изместьев

10 класс

1. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают график функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ первая – в точках A, D и E, вторая – в точках B, C и F (рис.3). Докажите, что длина проекции дуги CD на ось Ox равна сумме длин проекций дуг AB и EF.

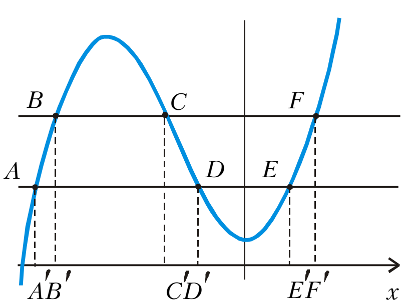

Рис. 3

И.Изместьев

2. См. задачу М1656 из «Задачника «Кванта».

3. Проведем через основание биссектрисы угла A разностороннего треугольника ABC отличную от стороны BC касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку ее касания с окружностью обозначим через K_a. Аналогично построим точки K_b и K_c. Докажите, что три прямые, соединяющие точки K_a, K_b и K_c с серединами сторон BC, CA и AB соответственно, имеют общую точку, причем эта точка лежит на вписанной окружности.

И.Шарыгин

4. Часть подмножеств некоторого конечного множества выделена. Каждое выделенное подмножество состоит в точности из $2k$ элементов (k – фиксированное натуральное число). Известно, что в каждом подмножестве, состоящем не более чем из $(k+1)^2$ элементов, либо не содержится ни одного выделенного подмножества, либо все в нем содержащиеся выделенные подмножества имеют общий элемент. Докажите, что все выделенные подмножества имеют общий элемент.

В.Дольников

5. С числом разрешается производить одно из двух действий: возводить в квадрат или прибавлять единицу. Даны числа 19 и 98. Можно ли из них за одно и то же количество действий получить равные числа?

Е.Малинникова

6. На множестве действительных чисел задана операция $*$, которая каждым двум числам a и b ставит в соответствие число $a*b$. Известно, что равенство $(a*b)*c = a + b + c$ выполняется для любых трех чисел a, b и c. Докажите, что $a*b = a + b$.

Б.Френкин

7. Дан выпуклый n-угольник ($n > 3$), никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Окружность, проходящую через три вершины многоугольника и содержащую внутри себя остальные его вершины, назовем описанной. Описанную окружность назовем граничной, если она проходит через три последовательные (соседние) вершины многоугольника; описанную окружность назовем внутренней, если она проходит через три вершины, никакие две из которых не являются соседними вершинами многоугольника. Докажите, что граничных описанных окружностей на две больше, чем внутренних.

О.Мусин

8. В каждую клетку квадратной таблицы размера $(2^n-1)\times(2^n-1)$ ставится одно из чисел +1 или −1. Расстановку чисел назовем удачной, если каждое число равно произведению всех соседних с ним (соседними называются числа, стоящие в клетках с общей стороной). Найдите число удачных расстановок.

Д.Любшин

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 – середины дуг BAC, CBA, ACB описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

3. На плоскости нарисовано некоторое семейство S правильных треугольников, получающихся друг из друга параллельными переносами так, что любые два треугольника пересекаются. Докажите, что найдутся три точки такие, что любой треугольник семейства S содержит хотя бы одну из них.

4. См. задачу М1660 из «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1652 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1655 из «Задачника «Кванта».

7. В тетраэдр $ABCD$, длины всех ребер которого не более 100, можно поместить две непересекающиеся сферы диаметра 1. Докажите, что в него можно поместить одну сферу диаметра 1,01.

Р.Карасев

8. См. задачу М1659 из «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовил
Н.Агаханов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили

Лифшиц Юрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Скопенков Михаил – Саратов, ФТЛ 1,
Красненко Екатерина – Омск, ФМШЛ 64;

по 10 классам –

Петров Федор – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Поярков Алексей – Рыбинск, лицей 2, 9 кл.,
Лузгарев Александр – Киров, КФМЛ;

по 11 классам –

Дуров Николай – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Дипломы II степени

по 9 классам получили

Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26,
Гайфуллин Александр – Жуковский, школа 10,
Карвонен Максим – Рыбинск, лицей 2,
Воробьев Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Халявин Андрей – Киров, КФМЛ,
Бурцев Александр – Омск, ФМШЛ 64,
Тихомиров Сергей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239;

по 10 классам –

Лебедев Алексей – с.Семеново Уренского р-на Нижегородской обл., школа 1 г.Урень,
Кузнецов Максим – Нижний Новгород, ФМЛ 40,
Мартьянов Владимир – Нижний Новгород, ФМЛ 40,
Мазин Михаил – Москва, лицей «Вторая школа»,
Бейлин Андрей – Ростов-на-Дону, школа 58,
Евсеев Антон – Москва, школа 57,
Лобарев Андрей – Новосибирск, СУНЦ НГУ;

по 11 классам –

Растатурин Алексей – Краснодар, школа 48,
Дремов Владимир – Волгодонск, школа 24, 9 кл.,
Шаповалов Данил – Иваново, школа-лицей 33,
Дильман Степан – Челябинск, ФМЛ 31,
Розенберг Антон – Санкт-Петербург, школа 419,
Черепанов Евгений – Рыбинск, школа 17,
Етеревский Олег – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Анно Ирина – Москва, школа 57,
Сорокин Алексей – Калуга, школа 19,
Фирсова Татьяна – Саров, школа 2,
Бахарев Федор – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сопкина Екатерина – Санкт-Петербург, ФМЛ 239.

Дипломы III степени

по 9 классам получили

Агапов Андрей – Москва, школа 57,
Исмагилов Ильнур – Саров, лицей 3,
Незлобин Александр – Санкт-Петербург, ФТШ,
Мойкина Татьяна – Ярославль, гимназия 1,
Гарбер Михаил – Ярославль, школа 33, 8 кл.,
Надеин Антон – Владивосток, школа 23,
Зинин Евгений – Краснодар, школа 87,
Смирнов Филипп – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Федотов Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Николаев Андрей – Омск, ФМШЛ 64,
Праведников Константин – Пермь, школа 17,
Колесников Андрей – Нижний Новгород, педагогическая гимназия,
Зарубина Анна – Москва, школа 57,
Свердлова Дарья – Вологда, естественно-математический лицей,
Крамаренко Денис – Краснодар, школа 42;

по 10 классам –

Чухнов Антон – Санкт-Петербург, школа 642,
Жиляев Владимир – Москва, гимназия 1543,
Рачков Роман – Нижний Тагил, политехническая гимназия,
Шпенев Алексей – Краснодар, школа 36,
Проскурников Антон – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Шишкин Сергей – Челябинск, ФМЛ 31,
Певзнер Игорь – Киров, КФМЛ,
Мовчан Игорь – Москва, школа 57,
Галкин Сергей – Москва, лицей «Вторая школа»,
Никокошев Илья – Москва, СУНЦ МГУ,
Баскаков Илья – Москва, школа 710;

по 11 классам –

Чернышенко Дмитрий – Москва, школа 57,
Железняк Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Плахов Андрей – Волгодонск, школа 19/20,
Андреев Михаил – Краснодар, лицей КГТУ,
Вишневский Александр – Долгопрудный, школа 5,
Боярченко Дмитрий – Ростов, школа 33,
Митягин Антон – Москва, школа 57,
Мельник Сергей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Попов Александр – Пермь, ФМШ 146,
Ткаченко Артем – Омск, школа-гимназия 88,
Доценко Владимир – Москва, школа 57,
Любимов Андрей – Москва, школа 57,
Фахрутдинов Валентин – Челябинск, ФМЛ 3,
Слепнев Владимир – Москва, школа 57,
Егоров Арсений – Санкт-Петербург, ФМГ 30,
Ковшов Николай – Долгопрудный, школа 11,
Инюхин Александр – Калуга, школа 12,
Гусаков Владимир – Владивосток, школа 23,
Беленький Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Антонов Михаил – Омск, школа-гимназия 88.