мой Фалеса, получаем

$$\frac{M_aP}{M_aL} = \frac{M_aP'}{M_aL} = \frac{PH}{LP} = \frac{P'M_a + PH}{M_aL + LP} = \frac{M_aH}{M_aP}.$$

Так как четырехугольник TK_aLH вписанный, углы M_aTH и M_aLK_a равны. Угол M_aLK_a легко выражается через углы треугольника ABC: $\angle M_aLK_a = 180° - 2\angle ALB = \beta - \gamma$. Рассмотрим теперь четырехугольник M_bTHM_a. Заметим, что $\angle HCA = \angle CHM_b = \gamma$ (треугольник CM_aH – равнобедренный), $\angle CM_aM_b = \beta$. Поэтому $\angle M_aM_bH = \beta - \gamma$, значит M_aTHM_b – вписанный ($\angle M_aTH = \angle M_aM_bH$) и, следовательно, $\angle M_aTM_b = M_aHM_b = \gamma$.

Обозначим через K точку пересечения отрезка TM_b со вписанной окружностью. Так как вписанный в окружность угол K_aTK равен γ, а дуга RK_a вписанной окружности равна $\alpha + \beta$ (это было доказано ранее), точки K_a и K симметричны относительно прямой OR. Но точки K_a и K_b, как отмечено ранее, также симметричны относительно этой прямой. Значит, точки K и K_b совпадают, что означает, что прямые M_aK_a и M_bK_b пересекаются в точке T вписанной окружности.

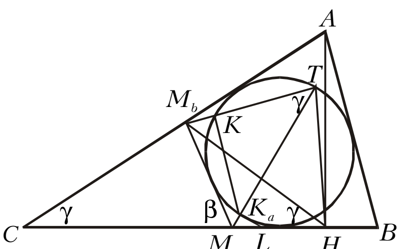

Рис. 13

4. Предположим противное. Тогда найдется такое n ($n > 1$), что любой набор из ($n - 1$)-го выделенного подмножества имеет общий элемент и существует n выделенных подмножеств A_1, A_2, …, A_n, не имеющих общего элемента. Исключим из набора A_1, A_2, …, A_n множество A_i. Оставшиеся имеют общий элемент, который мы обозначим через x_i. Заметим, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Каждое из множеств A_i содержит все элементы множества $\{x_1, x_2, …, x_n\}$, кроме x_i, поэтому, если из множества A_i исключить элементы множества $\{x_1, x_2, …$ $…, x_n\}$, то в каждом из них останется $2k - n + 1$ элемент. Следовательно, объединение множеств A_1, A_2, …, A_n состоит не более чем из $n + n(2k - n + 1) =$ $= n(2k + 2 - n)$ элементов. Максимальное значение выражения $n(2k + 2 - n)$ равно $(k+1)^2$. Но тогда, по условию задачи, все A_i должны иметь общий элемент. Противоречие.

5. *Ответ*: нельзя.

Допустим, что можно, и рассмотрим способ добиться этого за наименьшее количество действий. Пусть a_k, b_k – числа, получавшиеся из 19 и 98 после k-го действия, s – число действий. Тогда $a_s = b_s = m$ и $a_{s-1} \neq b_{s-1}$ (так как мы рассматриваем оптимальный способ). Действия, проведенные над a_{s-1} и b_{s-1} различны. Значит, $m = n^2$ и на ($s - 1$)-м шаге мы имели числа $a_{s-1} = n$ и $b_{s-1} = n^2 - 1$. Общее количество s действий не больше, чем $n - 18$, так как на ($s - 1$)-ом шаге мы получили n, а каждый шаг увеличивает числа по крайней мере на 1. Тогда $n^2 - 1$ могло получиться только последовательным прибавлением единиц, так как от ближайшего квадрата $(n-1)^2$ до $n^2 - 1$ будет $2n - 2$ единицы. Следовательно, $b_1 > (n-1)^2$, и все числа b_1, …, b_{s-1} не являются полными квадратами. Поэтому $b_s \geq 100$, с другой стороны, $a_s =$ $= a_{s-1}^2 \geq 19^2$. Противоречие.

6. Переписав выражение $((x*y)*z)*t$ двумя способами, получим равенство $(x+y+z)*t = (x*y) + z + t$. Подставив в него $x = y = 0$, имеем $z*t = z + t + C$, где $C = 0*0$. Тогда $(x*y)*z = (x+y+C) + z + C = x + y + z$, откуда $C = 0$.

7. Будем говорить, что три вершины n-угольника ($n > 3$), через которые проходит описанная окружность, образуют *отмеченный треугольник*. Докажем, что все отмеченные треугольники образуют *триангуляцию* многоугольника, т.е. разбиение многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники. Для этого докажем следующие свойства отмеченных треугольников:

1) Никакие два отмеченных треугольника не имеют общей внутренней точки.

2) Если ABC – отмеченный треугольник и AB – диагональ n-угольника, то к AB примыкает еще один отмеченный треугольник.

Далее будем называть отмеченный треугольник *граничным* (соответственно *внутренним*), если соответствующая описанная окружность граничная (внутренняя). Пусть Г – число граничных треугольников, В – число внутренних, П – число оставшихся отмеченных треугольников (назовем их *простыми*). Каждая из n сторон n-угольника принадлежит одному из треугольников, причем граничным треугольникам принадлежат по две стороны, простым – по одной, а внутренним – ни одной. Отсюда получим соотношение

$$n = 2Г + П. \qquad (1)$$

Каждая из ($n - 3$)-х диагоналей, образующих триангуляцию из отмеченных треугольников, принадлежит двум из них, причем граничным треугольникам принадлежит одна диагональ, простым – две, а внутренним – три. Отсюда вытекает равенство

$$2(n - 3) = Г + 2П + 3В. \qquad (2)$$

Так как любая триангуляция состоит из ($n - 2$)-х треугольников, то

$$Г + П + В = n - 2. \qquad (3)$$

Из соотношений (1), (2) и (3) легко получается требуемое равенство Г = В + 2.

8. *Ответ:* удачная расстановка единственна – все числа равны +1.

11 класс

2. Касательная l_A в точке A_2 к описанной окружности параллельна BC. Рассмотрев касательные l_B, l_C в точках B_2, C_2, аналогично получим $l_B \| AC$, $l_C \| AB$. Поэтому треугольник ABC гомотетичен треугольнику, образованному прямыми l_A, l_B, l_C. При этой гомотетии A_1 переходит в A_2, B_1 – в B_2, C_1 – в C_2. Поэтому прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекутся в центре гомотетии.

3. Пусть ABC – один из треугольников семейства S. Его высоту примем за единицу. Так как треугольники из S попарно пересекаются, то они лежат в некоторой полосе ширины 2, параллельной стороне AB. Аналогично взяв полосы, параллельные BC и CA, рассмотрим их пересечение – это будет шестиугольник H с углами по 120° и с расстояниями между противоположными сторонами, равными 2. У такого шестиугольника длины сторон, чередуются, обозначим их a и b (рис.14).

Пусть вначале $a \leq b$, тогда все треугольники из S содержат центр фигуры.

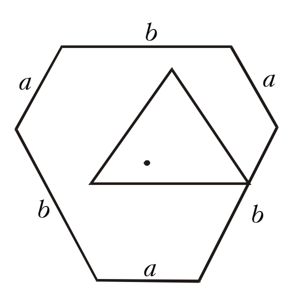

Рис. 14

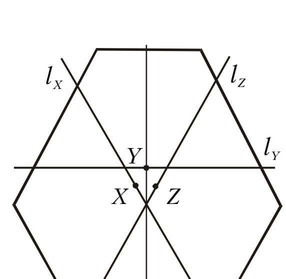

Рис. 15