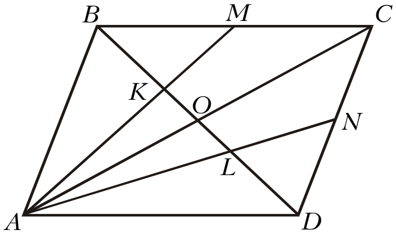

Рис. 4

го. При каждом ходе характеристика либо не меняется, либо уменьшается на 1. В последнем случае, очевидно, берется карта загаданной масти. Поскольку в начале характеристика колоды равнялась 13, а в конце – 0, по ходу игры она уменьшалась 13 раз.

4. *Указание.* Так как любые 9 точек лежат на двух окружностях, то найдется окружность O, на которой лежит не менее 5 точек. Рассмотрим все точки множества, не лежащие на O. Если таких точек четыре или меньше, то утверждение задачи верно.

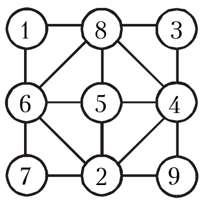

Рис. 5

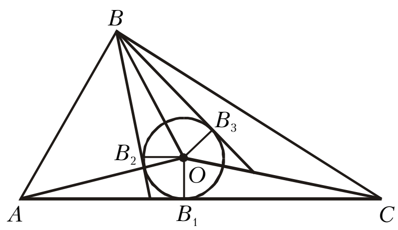

Рис. 6

Пусть вне окружности O лежит не менее пяти точек. Возьмем пять точек A_1, …, A_5 на O и три точки B_1, B_2, B_3 вне O. Через точки B_1, B_2, B_3 проходит единственная окружность O_1. Возьмите теперь любую точку B, отличную от A_1, …, A_5, B_1, B_2, B_3, и докажите, что она принадлежит одной из окружностей O или O_1.

5. Пример приведен на рисунке 5.

7. *Указание.* Для окружности S_B из равенства треугольников B_2OB, B_3OB, B_1OA и B_1OC (рис.6) следует, что $\angle B_2BB_3 = \angle OAC + \angle OCA$. Аналогичные равенства верны и для S_A и S_C.

8. Прогноз, в котором нет нулей, окажется *нехорошим*, если все избиратели не явятся на выборы. Поэтому в каждом *хорошем* прогнозе должны быть нули. Пусть в прогнозе П у кандидата A и некоторых из его друзей A_1, …, A_k – 0 голосов. Тогда при явке A на выборы прогноз по A, A_1, …, A_k ошибочен. Исключим A, A_1, …, A_k из списков кандидатов и уменьшим на 1 прогноз по остальным друзьям A. Тогда мы вернемся к исходной задаче, но с меньшим числом кандидатов и меньшим на одного человека (A) числом избирателей. Продолжая эту процедуру, мы приходим к несовпадению по каждому кандидату числа поданных голосов с прогнозируемым. Значит, исходный прогноз – *нехороший.*

9 класс

1. *Ответ:* все треугольники, длины сторон которых пропорциональны 3, 4 и 5. *Указание.* Диаметр $2r$ вписанной в треугольник окружности меньше любой из ее сторон. Поэтому прогрессия имеет вид $2r$, $2r + d$, $2r + 2d$, $2r + 3d$. Выразите d через r, воспользовавшись формулами Герона и $S = pr$.

2. По теореме о вписанных углах имеем равенства: $\angle PAC = \angle PQC$, $\angle PBD = \angle PQD$. Угол $\angle PBD$ – внешний для треугольника ABP, поэтому $\angle PBD = \angle PAB + \angle APB$. Отсюда $\angle APB = \angle PBD - \angle PAB = \angle PBD - \angle PAC = \angle PQD - \angle PQC = \angle CQD$, что и требовалось.

3. *Ответ*: $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$.
Указание. Если все цифры десятизначного числа различны, то их сумма равна 45, и потому это число делится на 9. Значит, если оно делится на 11111, то оно делится и на 99999. Десятизначное число $X = \overline{a_9 \ldots a_0} = 10^5 \cdot \overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_4 \ldots a_0} = 99999 \cdot \overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_4 \ldots a_0}$ делится на 99999 тогда и только тогда, когда делится на 99999 сумма $\overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_4 \ldots a_0}$. Эта сумма меньше чем $2 \cdot 99999$. Поэтому она делится на 99999 тогда и только тогда, когда она равна 99999. А это равносильно тому, что $a_0 + a_5 = 9$, $a_1 + a_6 = 9$, $a_2 + a_7 = 9$, $a_3 + a_8 = 9$ и $a_4 + a_9 = 9$. Таким образом, последние пять цифр интересного числа полностью определяются пятью его первыми цифрами, а первые пять цифр можно выбирать произвольно, следя только, чтобы никакие две из них не давали в сумме 9 и a_9 не равнялось нулю.

4. *Ответ*: 4. *Указание.* Докажите, что всякую связную фигуру, составленную из 101 клетки, можно заключить в прямоугольник с такими сторонами a и b, что $a + b = 102$. Поэтому 4 фигуры, равные данной, удастся вырезать всегда: для этого достаточно заключить ее в прямоугольник с суммой сторон 102, а затем вырезать из данного квадрата четыре таких прямоугольника так, как показано на рисунке 7. В то же время из квадрата нельзя вырезать больше 4-х фигур, имеющих форму креста, каждый «луч» которого состоит из 25 клеток.

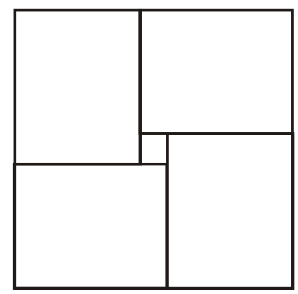
Рис. 7

5. *Ответ:* не могут.

6. *Ответ:* выиграет первый. Сначала ему надо делать ходы длиной в 4 клетки, пока он не встанет на 45-ю клетку. Теперь очередь хода за вторым. Если он тоже все время делает ходы длины 4, очередной ход приведет его на клетку 57. Тогда первый следующим ходом должен пойти на клетку 48 и после ответа второго пойти так, чтобы между ним и вторым оказалось 3 клетки (легко видеть, что это всегда возможно). После этого второй будет вынужден пойти на 1, 2 или 3 клетки и окажется в итоге правее 49-й клетки. Значит, до финиша ему останется больше 48 клеток, и, чтобы добраться туда, он должен будет сделать не меньше 13 ходов. Первый же находится не левее 49-й клетки, и ему до финиша остается не более 52 клеток, которые он сумеет преодолеть за 13 ходов.
Рассмотрим теперь случай, когда среди 11 первых ходов второго был ход менее чем на 4 клетки. Тогда он после 11-го хода окажется более чем в 56 клетках от цели, и для ее достижения ему понадобится минимум 15 ходов, а первому до цели остается 55 клеток, и он сможет добраться до нее за 15 ходов, даже если второй при встрече вынудит его сделать ход длины 3 вместо хода длины 4.

7. *Указание.* Пусть B_1 — середина стороны A_1A_2 и B_1B_2, … …, $B_{1998}B_1$ — траектория шара. Докажите, что треугольники $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$,…, $B_{1998}A_1B_1$ попарно равны. Для этого воспользуйтесь их почти очевидным подобием (подсчитайте их углы) и докажите, что коэффициент подобия равен 1.

8. *Ответ*. Нельзя. *Указание.* Введем на листе прямоугольную систему координат с осями, проходящими по линии сетки. Назовем четностью узла четность суммы его координат. Одну из ножек циркуля будем считать первой, другую — второй. Докажите, что четности углов, в которые попадают ножки циркуля, не меняются при выполнении шагов. Если изначально четности первой и второй ножек были различны, ножки поменяться местами не могут. Если эти четности одинаковы, рассмотрите вместо исходной новую сетку, у которой ячейки в 2 раза больше, а ножки циркуля изначально расположены в ее узлах, после чего повторите уже приведенные рассуждения.