угольника, принадлежащую только одному параллелограмму, назовем хорошей. Докажите, что хороших вершин не менее трех.

М.Смуров

3. См. задачу М1658 из «Задачника «Кванта».

4. См. задачу М1657 из «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1653 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1654 из «Задачника «Кванта».

7. Ювелир сделал незамкнутую цепочку из $N > 3$ пронумерованных звеньев. Капризная заказчица потребовала изменить порядок звеньев в цепочке. Из вредности она заказала такую незамкнутую цепочку, чтобы ювелиру пришлось раскрыть как можно больше звеньев. Сколько звеньев придется раскрыть?

А.Шаповалов

8. На доске написаны два различных натуральных числа a и b. Меньшее из них стирают и вместо него пишут число $\frac{ab}{|a-b|}$ (которое может уже оказаться нецелым). С полученной парой чисел делают ту же операцию и т.д. Докажите, что в некоторый момент на доске окажутся два равных натуральных числа.

И.Изместьев

10 класс

1. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают график функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ первая – в точках A, D и E, вторая – в точках B, C и F (рис.3). Докажите, что длина проекции дуги

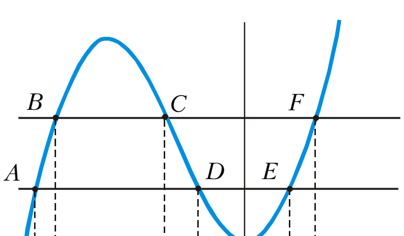

Рис. 3

CD на ось Ox равна сумме длин проекций дуг AB и EF.

И.Изместьев

2. См. задачу М1656 из «Задачника «Кванта».

3. Проведем через основание биссектрисы угла A разностороннего треугольника ABC отличную от стороны BC касательную к вписанной в треугольник окружности. Точку ее касания с окружностью обозначим через K_a. Аналогично построим точки K_b и K_c. Докажите, что три прямые, соединяющие точки K_a, K_b и K_c с серединами сторон BC, CA и AB соответственно, имеют общую точку, причем эта точка лежит на вписанной окружности.

И.Шарыгин

4. Часть подмножеств некоторого конечного множества выделена. Каждое выделенное подмножество состоит в точности из $2k$ элементов (k – фиксированное натуральное число). Известно, что в каждом подмножестве, состоящем не более чем из $(k+1)^2$ элементов, либо не содержится ни одного выделенного подмножества, либо все в нем содержащиеся выделенные подмножества имеют общий элемент. Докажите, что все выделенные подмножества имеют общий элемент.

В.Дольников

5. С числом разрешается производить одно из двух действий: возводить в квадрат или прибавлять единицу. Даны числа 19 и 98. Можно ли из них за одно и то же количество действий получить равные числа?

Е.Малинникова

6. На множестве действительных чисел задана операция $*$, которая каждым двум числам a и b ставит в соответствие число $a*b$. Известно, что равенство $(a*b)*c = a + b + c$ выполняется для любых трех чисел a, b и c. Докажите, что $a*b = a + b$.

Б.Френкин

7. Дан выпуклый n-угольник ($n > 3$), никакие четыре вершины которого не лежат на одной окружности. Окружность, проходящую через три вершины многоугольника и содержащую внутри себя остальные его вершины, назовем описанной. Описанную окружность назовем граничной, если она проходит через три последовательные (соседние) вершины многоугольника; описанную окружность назовем внутренней, если она проходит через три вершины, никакие две из которых не являются соседними вершинами многоугольника. Докажите, что граничных описанных окружностей на две больше, чем внутренних.

О.Мусин

8. В каждую клетку квадратной таблицы размера $(2^n-1)\times(2^n-1)$ ставится одно из чисел +1 или −1. Расстановку чисел назовем удачной, если каждое число равно произведению всех соседних с ним (соседними называются числа, стоящие в клетках с общей стороной). Найдите число удачных расстановок.

Д.Любшин

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 – середины дуг BAC, CBA, ACB описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 пересекаются в одной точке.

3. На плоскости нарисовано некоторое семейство S правильных треугольников, получающихся друг из друга параллельными переносами так, что любые два треугольника пересекаются. Докажите, что найдутся три точки такие, что любой треугольник семейства S содержит хотя бы одну из них.

4. См. задачу М1660 из «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1652 из «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1655 из «Задачника «Кванта».

7. В тетраэдр $ABCD$, длины всех ребер которого не более 100, можно поместить две непересекающиеся сферы диаметра 1. Докажите, что в него можно поместить одну сферу диаметра 1,01.

Р.Карасев

8. См. задачу М1659 из «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовил
Н.Агаханов