вершина пока не там, где она должна быть. Квадрат может меняться; его четвертая вершина может перемещаться. Как она может перемещаться?

— Все равно не понял.

— *Поэкспериментируйте. Постройте еще несколько таких квадратов. Начертите маленькие и большие квадраты. Где может находиться четвертая вершина квадрата, если две его вершины лежат на одной стороне данного острого угла, а третья — на другой? Иными словами, как перемещается четвертая вершина, когда квадрат меняется?*

Пойа уверен, что после такой обстоятельной подсказки ученик обязатель-

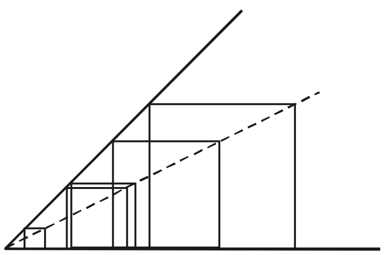

Рис. 5

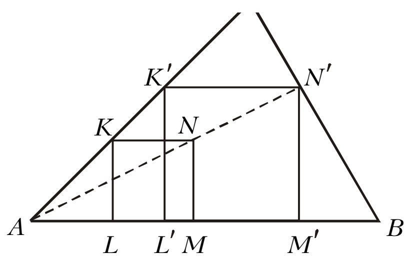

Рис. 6

но нарисует что-то вроде рисунка 5 и смекнет, что вершина N' искомого квадрата — это точка пересечения луча AN с отрезком BC (рис. 6).

Как вписать треугольник, гомотетичный данному?

Теперь мы легко справимся со следующей задачей:

Задача 3. *Разместите в данном треугольнике ABC наибольший возможный треугольник $X'Y'Z'$, стороны которого параллельны сторонам данного треугольника XYZ.*

Решение. Параллельным переносом можно свести задачу к случаю, когда вершина X лежит на стороне треугольника ABC (рис.7). «Раздутием» (точнее говоря, гомотетией) с центром X получим треугольник XY_1Z_1, две вершины которого лежат на сторонах ΔABC. Осталось применить гомотетию с центром C — и мы получим треугольник $X'Y'Z'$, все верши-

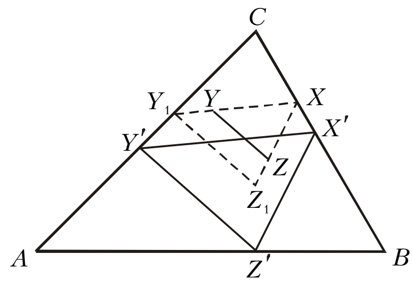

Рис. 7

ны которого лежат на сторонах треугольника ABC.

«Очевидно», что треугольник $X'Y'Z'$ — наибольший возможный. Столь же «очевидно», что он гомотетичен или равен треугольнику XYZ.

Если задуматься над доказательствами последних двух утверждений, то станет ясно, что лучше было рассуждать не так, как это делали мы, а следующим образом.

Проведем через вершины треугольника XYZ прямые параллельно сторонам треугольника ABC (рис. 8). Треугольники ABC и $A'B'C'$ с параллельными сторонами подобны, а прямые,

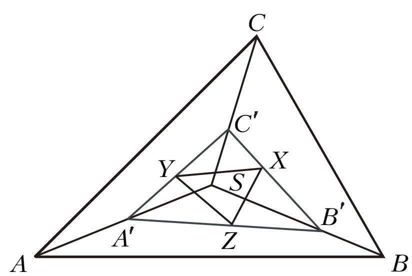

Рис. 8

соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке S — центре гомотетии.

Последнее утверждение становится очевидным, если мы приподнимем треугольник $A'B'C'$ над плоскостью чертежа. Получим в параллельной плоскости треугольник $A''B''C''$. Три плоскости боковых граней усеченной пирамиды, основаниями которой служат треугольники ABC и $A''B''C''$, пересекаются в одной точке (рис. 9). В этой точке пересекаются и продолжения боковых ребер AA'', BB'', CC'' пирамиды. Спроецировав пирамиду на исходную плос-

Рис. 9

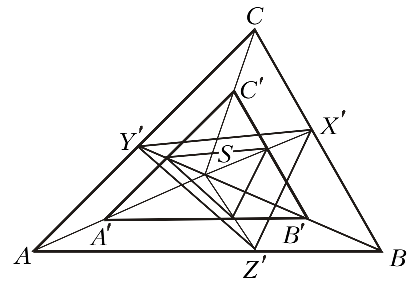

Рис. 10

кость, получим, что упомянутые три прямые действительно пересекаются в одной точке S.

Гомотетией с центром S из треугольника XYZ можно получить треугольник $X'Y'Z'$, вершины которого лежат на сторонах ΔABC (рис.10).

Упражнение 1. Докажите для любого треугольника неравенство $2r \le R$, где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей.

Указание. Рассмотрите окружность радиусом $R/2$, описанную вокруг треугольника, образованного средними линиями. Проведите касательные к ней, параллельные сторонам исходного треугольника.

Семейство вписанных подобных треугольников

Наше решение задачи 1 основано на том, что треугольник XYZ, вписанный в данный ΔABC, порождает семейство подобных вписанных треугольников. Для построения этого семейства нам потребуется один из красивейших геометрических фактов.

Задача 4. *Если точки X, Y и Z лежат, соответственно, на прямых BC, CA и AB, то описанные окружности треугольников AYZ, CXY и BZX пересекаются в одной точке.*

Решение. Рассмотрим точку M пересечения описанных окружностей треугольников AYZ и CXY (рис. 11). Поскольку сумма противоположных углов вписанного четырехугольника рав-

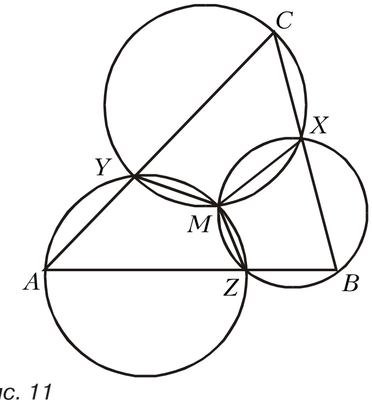

Рис. 11