из положения равновесия. Пусть разлом доски, т.е. разрыв ее внешней поверхности, происходит при некотором значении $x_0 = x_p$. Такой разрыв происходит, когда напряжение σ (сила, действующая на единицу площади сечения доски) на поверхности доски достигает определенного значения σ_p, характеризующего материал.

Найдем вначале связь между x_p и σ_p, которая, очевидно, определяется упругими свойствами и геометрическими размерами доски. Максимальный изгиб и, следовательно, максимальное напряжение на поверхности доски будет в ее середине. Как показано в Приложении 1, это напряжение равно

$$\sigma = \frac{Eh}{2R},$$

где R – радиус кривизны центральной линии CC в середине доски (см. рис.2), а E – модуль Юнга материала доски.

Зададим теперь форму доски при изгибе, учитывая, что края доски закреплены в точках $y = \pm l/2$, а максимальное смещение из положения равновесия имеет ее центр. Отметим, что точная форма доски зависит от конкретных (не очень ясных) условий контакта ударной поверхности кулака с доской (при правильном ударе – это суставы указательного и среднего пальцев). Поэтому для расчетов можно ограничиться удобной формулой, основанной на практическом опыте и позволяющей провести простые оценки. Будем считать форму доски при изгибе косинусоидой, закрепленной в точках $y = \pm l/2$. В этом случае смещение x какой-либо точки центральной линии зависит от ее координаты y по закону

$$x(y) = x_0 \cos\left(\frac{\pi y}{l}\right).$$

В Приложении 2 показано, что при этом радиус кривизны в центре доски будет равен

$$R = \left(\frac{l}{\pi}\right)^2 \frac{1}{x_0}.$$

Подставив полученное выражение для радиуса кривизны в выражение для σ, найдем напряжение в середине доски на ее поверхности при смещении центра доски на величину x_0:

$$\sigma = \frac{x_0 E h \pi^2}{2l^2}.$$

Отсюда видно, что разлом ($\sigma = \sigma_p$) происходит при смещении центра доски на величину

$$x_p = \frac{2\sigma_p l^2}{\pi^2 E h}.$$

Смоделируем далее упругие свойства доски относительно приложенной внешней силы пружиной жесткостью k. Этот коэффициент найден в Приложении 3 и имеет величину

$$k = \frac{\pi^2 E h^3 d}{3l^3}.$$

После определения необходимых параметров вернемся к сформулированной раньше динамической задаче об ударе по доске и запишем уравнение движения кулака в виде второго закона Ньютона:

$$mx'' = -kx + F,$$

где x теперь – смещение кулака от исходной поверхности контакта с доской, а штрихи обозначают производные по времени. Для оценки будем полагать, что приложенная человеком к кулаку сила F постоянна во времени. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что общее решение уравнения движения имеет вид

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{F}{k}$$

и содержит две произвольные константы A и B. Для их определения зададим условия в начальный момент времени $t = 0$: $x = 0$ и $x' = v$. Тогда получим

$$x = \frac{f}{\omega^2}(1 - \cos\omega t) + \frac{v}{\omega}\sin\omega t,$$

где $f = F/m$ – величина, имеющая размерность ускорения, и $\omega = \sqrt{k/m}$ – частота собственных колебаний кулака под действием упругой силы со стороны доски. Найдем теперь максимальное отклонение кулака x_{max} при заданном значении начальной скорости v и силы F. Приравнивая к нулю производную от x по времени t и затем исключая t, находим

$$x_{max} = \frac{f}{\omega^2}\left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{v\omega}{f}\right)^2}\right).$$

Для получения условий разлома это отклонение нужно приравнять к отклонению x_p, откуда получаем уравнение

$$\frac{2\sigma_p h^2 d}{3Fl} = 1 + \sqrt{1 + \frac{\pi^2 E h^3 v^2 d m}{3F^2 l^3}},$$

связывающее свойства материала доски и ее геометрические размеры с параметрами, характеризующими удар.

Решим это уравнение относительно силы F, опять вводя для удобства значения x_p и k. В этих обозначениях получим простое выражение

$$F = \frac{kx_p}{2} - \frac{mv^2}{2x_p}$$

– такую силу необходимо приложить в момент контакта к кулаку, движущемуся с начальной скоростью v, чтобы разбить доску. Очевидно, что если скорость кулака достаточно велика, выражение для F получается отрицательным и силу можно не прикладывать. В этом случае начальная скорость должна превышать значение

$$v = x_p\omega = \frac{2\sigma_p}{\pi\sqrt{3}}\sqrt{\frac{lhd}{mE}},$$

которое пропорционально квадратному корню из толщины доски h. Наоборот, если начальная скорость кулака v равна нулю, то из выражения для F следует, что, для того чтобы сломать (продавить) доску, необходимо приложить силу

$$F = \frac{kx_p}{2} = \frac{h^2\sigma_p d}{3l},$$

пропорциональную квадрату толщины h. Значит, с увеличением толщины доски выгоднее увеличивать скорость, а не силу.

Решим теперь уравнение, определяющее условие разлома доски, относительно h и получим значение толщины доски, которую можно разбить при заданных параметрах удара:

$$h = \frac{3\pi^2 E v^2 m}{8\sigma_p^2 l d}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{64 F l^3 \sigma_p^3 d}{3\pi^4 E^2 v^4 m^2}}\right).$$

Проведем некоторые численные оценки, задав характерные параметры материала доски: $E = 10^8$ Н/м^2 и $\sigma_p = 5\cdot 10^6$ Н/м^2, взятые из экспериментальных измерений. Стандартные в тамэси-вари ширина и длина доски составляют 20 см и 30 см, однако в расчетах будем полагать $l =$ = 25 см, поскольку края доски, выс-