Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 — 98» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1646» или «Ф1653». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1646 и М1647 предлагались на зональном туре Российской математической олимпиады, М1648 а), М1649 и М1650 — на отборочном туре Московской математической олимпиады.

Задачи Ф1653 – Ф1657 предлагались на окружном туре Московской физической олимпиады.

Задачи М1646 — М1650, Ф1653 — Ф1657

М1646. У нескольких крестьян есть 128 овец. Если у кого-то из них оказывается не менее половины всех овец, остальные сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть. Если у двоих по 64 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них. Произошло 7 раскулачиваний. Докажите, что в результате все овцы собрались у одного крестьянина.

А.Шаповалов

М1647. Докажите, что из любого конечного множества точек на плоскости можно так удалить одну точку, что оставшееся множество можно разбить на два множества, диаметры которых меньше диаметра первоначального множества. (Диаметр – это максимальное расстояние между точками множества.)

В.Дольников

М1648. Из центра правильного многоугольника, вписанного в единичную окружность, проведены некоторые векторы в вершины этого многоугольника. Может ли длина суммы этих векторов равняться а) 1998; б)* $\sqrt{1998}$?

В.Сендеров

М1649*. На конференцию приехали 300 участников. Каждый участник знает три языка из пяти, официально принятых на конференции. Докажите, что всех участников можно разбить на три группы по 100 человек так, чтобы для каждой группы нашелся язык, общий для всех ее членов.

А.Берзиньш

М1650*. На плоскости нарисован граф без циклов Г. Известно, что граф Г′, полученный из Г параллельным переносом на вектор (1, 0), не пересекается с Г. На графе Г отмечены две различные точки A и B, в которых в начальный момент времени сидели два жука. Ползая по графу, жуки через некоторое время снова оказались в точках A и B, но при этом поменялись местами. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между жуками было меньше 1.

А.Скопенков

Ф1653. С балкона бросают камешки через равные интервалы времени и без начальной скорости. К моменту, когда первый камешек упал на землю, следующий пролетел ровно половину пути. Какую часть пути пролетел к этому моменту третий камешек? Сколько камешков было в полете непосредственно перед ударом первого камешка о землю? Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать ускорение свободного падения равным точно 10 м/с^2 .

З.Рафаилов

Ф1654. Предлагается следующий проект движущегося тротуара: человек ступает с земли на первую движущуюся дорожку, через некоторое время переходит на следующую, у которой скорость больше, и так далее. Пусть первая дорожка едет с постоянной скоростью $v_1 = 2$ м/с, человек с неподвижной земли ступает на нее перпендикулярно вектору скорости и, перестав скользить, переходит дальше – опять перпендикулярно вектору скорости. Ожидаемая нагрузка на такую дорожку (число людей, ступающих на нее с земли) составляет $N = 10$ человек в секунду, масса человека в проекте принимается равной $M = 80$ кг. С какой минимальной силой нужно тянуть дорожку в горизонтальном направлении, чтобы ее скорость оставалась постоянной? С какой силой нужно действовать на вторую дорожку, если она движется со скоростью $v_2 = 3$ м/с? Считайте, что в среднем число людей на каждой из дорожек одинаково.

Р.Простов

Ф1655. Моль гелия в процессе расширения получает тепло, его теплоемкость при этом составляет $C = 15$ Дж/(моль · К). Найдите изменение температуры гелия в этом процессе при совершении им работы $A = 20$ Дж.

М.Учителев

Ф1656. В вершинах правильного треугольника со стороной a находятся три маленьких заряженных тела. Одно из них закреплено, два других – масса каждого из них M, заряд Q – свободны. Какой заряд нужно поместить на закрепленное тело, чтобы при отпускании двух других их ускорения оказались минимальными? Чему будет равна величина этого ускорения?

А.Зильберман

Ф1657. Два одинаковых громкоговорителя подключили параллельно к выходу генератора звуковых колебаний, а очень маленький микрофон расположили в отдалении. При неизменной температуре воздуха $T = 300$ К мы проводим эксперимент – изменяем частоту генератора и наблюдаем за показаниями чувствительного вольтметра, который измеряет выходной сигнал микрофона. На частоте $f_1 = 2400$ Гц получается максимум выходного сигнала микрофона, на частоте $f_2 = 2600$ Гц – минимум, а между этими частотами уровень сигнала от микрофона монотонно убывает. Что будет наблюдаться на частоте $f_3 = 400$ Гц? При какой температуре воздуха получился бы максимум на частоте f_2? Отражения звуковых волн от стен, пола и потолка не происходит.

Р.Александров