

*v*. Тогда после удара первый шарик будет двигаться с некоторой скоростью, равной  $v_1$  и направленной под углом  $\varphi$  к направлению первоначального движения, а второй шарик, который до удара покоился, будет двигаться со скоростью, равной  $v_2$  и направленной под углом  $\psi$  к направлению первоначального движения первого шарика. Из закона сохранения импульса для абсолютно упругого удара движущегося шарика о неподвижный имеем

$$mv = mv_1 \cos \varphi + mv_2 \cos \psi,$$

$$mv_1 \sin \varphi = mv_2 \sin \psi,$$

причем

$$\varphi + \psi = \pi/2,$$

т.е. после абсолютно упругого нецентрального удара движущегося шара о покоящийся скорости разлетающихся шаров направлены под углом  $90^\circ$  друг к другу. Отсюда находим

$$v_1 = v \cos \varphi.$$

Это означает, что поворот вектора скорости налетающего шара на угол  $\varphi$  сопровождается уменьшением величины скорости в  $\cos \varphi$  раз. Значит, после двух последовательных соударений скорость налетающего шарика будет равна  $u_2 = v \cos \varphi \cos(\alpha - \varphi)$  (напомним, что шарик поворачивает за два удара на угол  $\alpha$ ). Для того чтобы скорость шарика после двух ударов была максимальной, необходимо, чтобы было максимальным произведение  $\cos \varphi \cos(\alpha - \varphi)$ . Из известной формулы

$$\cos \varphi \cos(\alpha - \varphi) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - 2\varphi) + \cos \alpha)$$

ясно, что это выражение будет иметь максимальное значение при  $\cos(\alpha - 2\varphi) = 1$ , т.е. при  $\varphi = \alpha/2$ , что и требовалось доказать.

Рассматривая таким же способом каждую пару последовательных ударов, приходим к выводу, что, для того чтобы конечная скорость была максимальной, при каждом ударе налетающий шар должен поворачивать на один и тот же угол  $\varphi$ . Так как по условию после  $N - 1 = 100$  соударений этот шар начинает двигаться в противоположном направлении, то  $\varphi = \pi/(N - 1) = \pi/100$ . После соотого соударения шар будет иметь скорость

$$u_{100} = v(\cos \varphi)^{N-1}.$$

Учитывая малость угла  $\varphi$ , окончательно получим

$$\begin{aligned} u_{100\max} &= v(\cos \varphi)^{N-1} \approx v(\sqrt{1 - \sin^2 \varphi})^{N-1} \approx v(\sqrt{1 - \varphi^2})^{N-1} \approx \\ &\approx v\left(1 - \frac{N-1}{2} \varphi^2\right) = v\left(1 - \frac{\pi^2}{200}\right) \approx 0,95v. \end{aligned}$$

**3.** Кочерга начинает гнуться тогда, когда напряжение в ее материале превышает предел упругости  $\sigma$ . При этом слои, находящиеся на внешней стороне дуги изгибаемой кочерги, растягиваются, а находящиеся на внутренней стороне дуги сжимаются. Для оценки момента сил, который надо приложить, чтобы кочерга согнулась, можно считать, что на верхнюю половину сечения кочерги действует растягивающее усилие  $\sigma \cdot a \cdot a/2$ , а на нижнюю половину – такое же сжимающее усилие. Тогда момент сил равен

$$M = \sigma \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{\sigma a^3}{4}.$$

(Более точная оценка получается при учете линейного закона изменения напряжения по сечению.)

Получим теперь оценку для силы. Заметим, что кочергу можно гнуть двумя способами. Первый способ – упираться коленом в середину кочерги, а за ее концы тянуть руками с

силой  $F$ . Тогда изгибающий момент будет равен  $M = Fl/2$ , откуда

$$F = \frac{2M}{l} = \frac{2}{l} \frac{\sigma a^3}{4} = \frac{\sigma a^3}{2l} = 150 \text{ Н}.$$

Это не очень большое усилие.

Второй, более «честный», способ гнуть кочергу – создавать моменты сил только ладонями рук, ничем другим не упираться в кочергу. Считая, что ширина ладони  $L \approx 10$  см, получаем

$$F_1 = \frac{M}{L} = \frac{\sigma a^3}{4L} = 750 \text{ Н}.$$

Такое усилие создать пальцами рук достаточно трудно.

**4.** В данной системе заряды могут располагаться либо на одной прямой, либо образовывать вершины треугольника. Случаев равновесия, когда заряды находятся на одной прямой, возможно три – они показаны на рисунке 11. Все эти случаи реализуются при любых

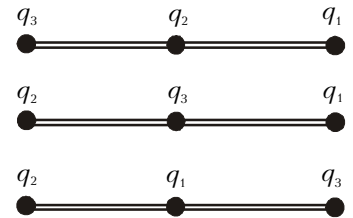


Рис. 11

соотношениях между зарядами  $q_1$ ,  $q_2$  и  $q_3$ , но устойчивым положением равновесия является только один из них – в зависимости от соотношения величин зарядов. Во всех этих случаях нить растягивается силами отталкивания зарядов, причем средний заряд располагается так, чтобы сумма действующих на него сил была равна нулю. Так как нить при этом оказывается сложенной пополам, то расстояние между крайними зарядами равно  $l/2$ , и на каждый из этих зарядов действует сила электрического отталкивания и удвоенная сила натяжения нити. Из условия равновесия зарядов для каждого из случаев находим силы натяжения нити:

$$T_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l^2} \left( q_1 q_3 + (\sqrt{q_1 q_2} + \sqrt{q_2 q_3})^2 \right),$$

$$T_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l^2} \left( q_1 q_2 + (\sqrt{q_1 q_3} + \sqrt{q_2 q_3})^2 \right),$$

$$T_3 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 l^2} \left( q_2 q_3 + (\sqrt{q_1 q_2} + \sqrt{q_1 q_3})^2 \right).$$

Далее обсудим случай, когда заряды образуют вершины треугольника (рис.12).

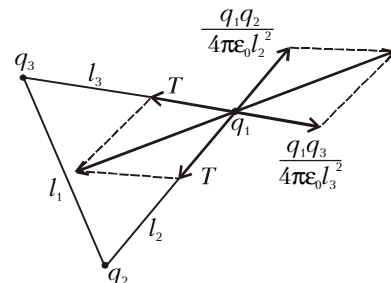


Рис. 12

Рассмотрим какой-либо заряд, например  $q_1$ . Сумма сил, действующих на этот заряд, равна нулю (заряд неподвижен). Со стороны нити действуют две одинаковые по модулю силы натяжения  $T$ , направленные вдоль сторон треугольника. Следовательно, равнодействующая этих сил направлена по биссектрисе соответствующего угла. Тогда равнодействующая сил электростатического взаимодействия