

Рис. 2

фигур ответ определяется тем, что больше – ширина полосы или ширина фигуры в соответствующем направлении, т.е. ширина самой узкой полосы, в которой содержится F и края которой параллельны заданному направлению.

Чтобы получить такую полосу, можно взять сначала полосу соответствующего направления, достаточно широкую для того, чтобы в ней содержалась фигура F (на рисунке 3 такая полоса ограничена прямыми m и n). Затем края полосы надо двигать друг к другу до тех пор, пока они не упрутся в F . На рисунке 3 эти прямые – a и b . Они называются *опорными прямыми* фигуры F .

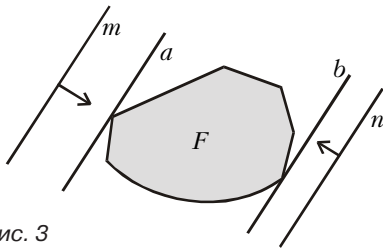


Рис. 3

Каждому направлению соответствует своя пара опорных прямых. Как уже было сказано, расстояние между ними, т.е. ширина получившейся полосы, называется шириной фигуры F в соответствующем направлении. Например, если F – квадрат со стороной 1, то ширина, в зависимости от направления, меняется от 1 до $\sqrt{2}$.

Если F – треугольник, то ширина меняется от минимальной, равной наименьшей из высот треугольника, до максимальной, равной наибольшей его стороне.

Доказать последнее утверждение о максимальной ширине совсем просто: с одной стороны, расстояние между опорными прямыми, перпендикулярными стороне треугольника, не может быть меньше длины этой стороны. С другой стороны, расстояние между параллельными опорными прямыми треугольника не превосходит длины стороны, концы которой лежат на этих прямых (например, ширина горизонтальной полосы рисунка 4 не превосходит AB).

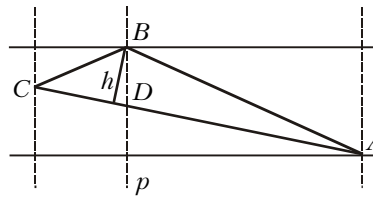


Рис. 4

Упражнение 1. Докажите, используя рисунок 4, что ширина треугольника по любому направлению не меньше минимальной из высот треугольника.

Упражнение 2. Какой должна быть ширина полосы бумаги, чтобы из нее можно было вырезать треугольник со сторонами 15 см, 20 см и 25 см?

Фигуры постоянной ширины

Ширина круга во всех направлениях одинакова и равна диаметру круга. Хотя это и не связано прямо с темой статьи, отметим, что существуют отличные от круга выпуклые фигуры постоянной ширины.

Пример – *треугольник Рело*. Он получается, если нарисовать правильный треугольник ABC и дуги с центрами A, B, C (рис. 5). Есть и другие примеры. Так, вместо правильного треугольника можно было взять правильный пятиугольник (или даже

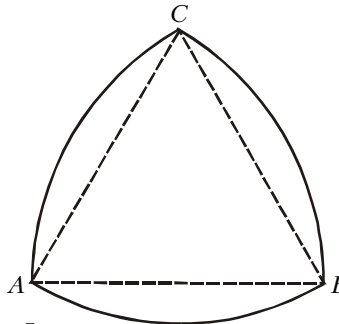


Рис. 5

выпуклый пятиугольник, все диагонали которого одной длины).

Определения

Если ширина фигуры зависит от направления, то естественно рассмотреть наименьшую и наибольшую из ширин. (В Приложении будет объяснено, почему эти величины действительно существуют. Пока лучше на это не отвлекаться.)

Определение 1. *Шириной* фигуры называется наименьшая из ее ширин по направлениям, т.е. ширина самой узкой полосы, которой можно покрыть эту фигуру (или, что то же самое, ширина наименьшей по-

лосы, из которой фигуру можно вырезать).

Определение 2. *Диаметром* замкнутой¹ ограниченной фигуры называется наибольшее из расстояний между ее точками.

Упражнение 3. Найдите диаметр а) треугольника, б) прямоугольника, в) полукруга.

Упражнение 4. Для каких треугольников диаметр совпадает с диаметром описанной окружности?

Упражнение 5. Докажите, что а) ширина прямоугольника равна его наименьшей стороне; б) ширина параллелограмма равна его наименьшей высоте.

Упражнение 6. Докажите, что ширину выпуклого многоугольника можно найти следующим образом: сначала для каждой стороны найти расстояние до наиболее удаленной от нее вершины, а затем из этих расстояний выбрать наименьшее.

Упражнение 7. Докажите, что диаметр фигуры совпадает с максимальной из ее ширин по направлениям.

Упражнение 8. а) Может ли опорная прямая не иметь с ограниченной фигурой ни одной общей точки? б) Может ли опорная прямая неограниченной замкнутой фигуры не иметь с фигурой ни одной общей точки?

Подведем итог в задаче о покрытии фигуры одной полосой: если о направлении полосы ничего не известно, то для того, чтобы ее параллельным сдвигом можно было покрыть фигуру, достаточно потребовать, чтобы ширина полосы была не меньше диаметра фигуры.

Покрытия квадрата двумя полосами обсуждены в разделе «Гипотеза о покрытиях». Покрытия тремя и более полосами примененным там методом не изучим. Сейчас перейдем к задаче, в условии которой нет слов «полоса» и «ширина». Но именно ширина – ключ к решению.

Разделяющая прямая

Правильные треугольники

Задача 1. Если в правильном треугольнике со стороной 1 расположены не налегающие друг на друга правильные треугольники со сторонами a и b , то $a + b \leq 1$ (рис. 6).

Решение. Как бы ни были располо-

¹ Замкнутой называется фигура, которая содержит все точки своей границы.