

# Варианты вступительных экзаменов 1997 года

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\log_{x^2}|3x+1| < \frac{1}{2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin 3x} = 2 \cos 2x.$$

3. Окружность касается сторон  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. На дуге этой окружности, лежащей внутри треугольника, расположена точка  $K$  так, что расстояния от нее до сторон  $AC$  и  $BC$  равны 6 и 24 соответственно. Найдите расстояние от точки  $K$  до стороны  $AB$ .

4. Графику функции  $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$  принадлежат точки  $A$  и  $B$ , симметричные относительно прямой  $x = -2$ . Касательные к этому графику в точках  $A$  и  $B$  параллельны между собой. Одна из этих касательных проходит через точку  $(0; -2)$ , а другая — через точку  $(0; -6)$ . Найдите значения  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

5. Внутри цилиндра лежат два шара радиуса  $r$  и один шар радиуса  $\frac{r}{2}$  так, что каждый шар касается двух других, нижнего основания цилиндра и его боковой поверхности. Найдите радиус основания цилиндра.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_2(4 \cos x + 3) \log_6(4 \cos x + 3) = \log_2(4 \cos x + 3) + \log_6(4 \cos x + 3).$$

2. Решите неравенство

$$\frac{7 - 3x + \sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x - 3} < -1.$$

3. В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB$  и  $AC$  расположены точки  $D$  и  $E$  соответственно так, что  $CD$  — биссектриса треугольника  $ABC$ ,  $DE$  — биссектриса треугольника  $ACD$ ,  $EC = ED = \frac{4}{9}$ ,  $BC = 1$ . Найдите  $CD$  и площадь треугольника  $ABC$ .

4. К графику функции  $y = -\frac{x^2}{12} + x - \frac{16}{3}$  проведена касательная, пересекающая график функции  $y = 3|x + 6| - \frac{7}{3}$  в точках  $A$  и  $B$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника с вершинами в точках  $A$ ,  $B$  и  $C(-6; -\frac{7}{3})$ , если  $\angle CAB = 2 \arccos \frac{3}{\sqrt{10}} + \angle CBA$ .

5. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$  через точку  $A$  параллельно прямой  $BD$  проведена плоскость  $P$ , образующая с прямой  $AB$  угол, равный  $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Найдите площадь сечения куба плоскостью  $P$  и радиус шара, касающегося плоскости  $P$  и граней  $ABCD$ ,  $BCC_1 B_1$  и  $DCC_1 D_1$ .

Вариант 3

1. Найдите все действительные корни уравнения

$$|2\sqrt{x} + 1 - x| + |x - 2\sqrt{x} + 2| = 7.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6 \sin x \cos y + 2 \cos x \sin y = -3, \\ 5 \sin x \cos y - 3 \cos x \sin y = 1. \end{cases}$$

3. Около окружности описаны ромб со стороной 3 и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 7. Найдите радиус окружности.

4. Пусть  $M$  — множество точек плоскости с координатами  $(x; y)$  таких, что числа  $3x$ ,  $2y$  и  $9 - y$  являются длинами сторон некоторого треугольника. Найдите площадь фигуры  $M$ .

Фигура  $\Phi$  состоит из точек множества  $M$  таких, что неравенство  $t^2 + 2t(x - 2) + 7 - y > 0$  выполняется при всех значениях параметра  $t$ . Найдите площадь фигуры  $\Phi$ .

5. В треугольной пирамиде  $ABCD$  ребра  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны,  $AB = BD = AD = a$ , середина ребра  $AC$  равноудалена от плоскостей  $ABD$  и  $BCD$ , угол между ребром  $AC$  и гранью  $CBD$  равен  $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Найдите длину ребра  $CD$ ,  $\angle CAD$  и угол между ребром  $BD$  и гранью  $ACD$ .

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Пуля летит горизонтально со скоростью  $v_0$ , пробивает лежащую на горизонтальной поверхности стола коробку и вылетает в том же направлении с вдвое меньшей скоростью. Масса коробки в пять раз больше массы пули. Коэффициент трения скольжения между коробкой и столом  $\mu$ . 1) Найдите скорость коробки сразу после вылета из нее пули. 2) На какое расстояние передвинется коробка?

2. Вода и водяной пар находятся в цилиндре под поршнем при температуре  $110^\circ\text{C}$ . Вода занимает при этом 0,1% объема цилиндра. При медленном изотермическом увеличении объема вода начинает испаряться. К моменту, когда она вся испарилась, пар совершил работу  $A = 177$  Дж, а объем, который он занимал, увеличился на  $\Delta V = 1,25$  л. Найдите давление, при котором производился опыт. Сколько воды и пара было в цилиндре в начальном состоянии?

3. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных батареи ЭДС  $\mathcal{E}$ , резистора сопротивлением  $R$  и конденсатора переменной емкости, начальное значение которой равно  $C_0$ . Через некоторое время после замыкания ключа в цепи течет ток  $I_0$ . Начиная с этого момента емкость конденсатора изменяется таким образом, что ток в цепи остается постоянным и равным  $I_0$ . 1) Определите ток в цепи сразу после замыкания ключа. 2) Найдите зависимость емкости конденсатора от времени. Внутреннее сопротивление батареи не учитывать.

4. Показатель преломления некоторой плоской среды имеет такую зависимость от координаты  $y$  (рис.1): при

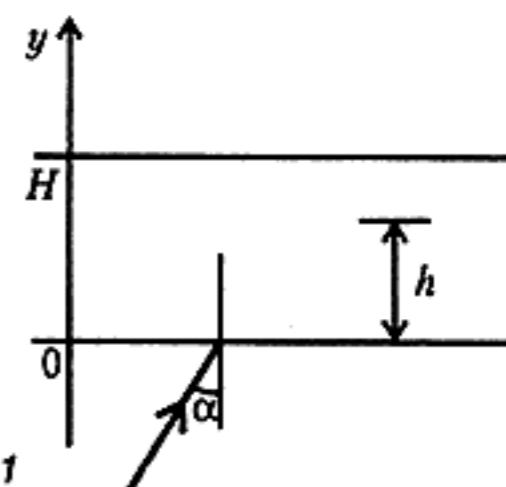


Рис. 1