

где Q — полный заряд кольца. В центре кольца поле равно нулю, а при $h \gg R$ переходит, как и следовало ожидать, в поле точечного заряда.

Как видно, в данном случае сумма выродилась в тривиальное сложение зарядов отдельных кусочков. Если, однако, зарядить кольцо неравномерно или сдвинуть в сторону точку наблюдения, задача станет несравненно сложнее.

Теперь перейдем к полю бесконечной равномерно заряженной нити (рис.2).

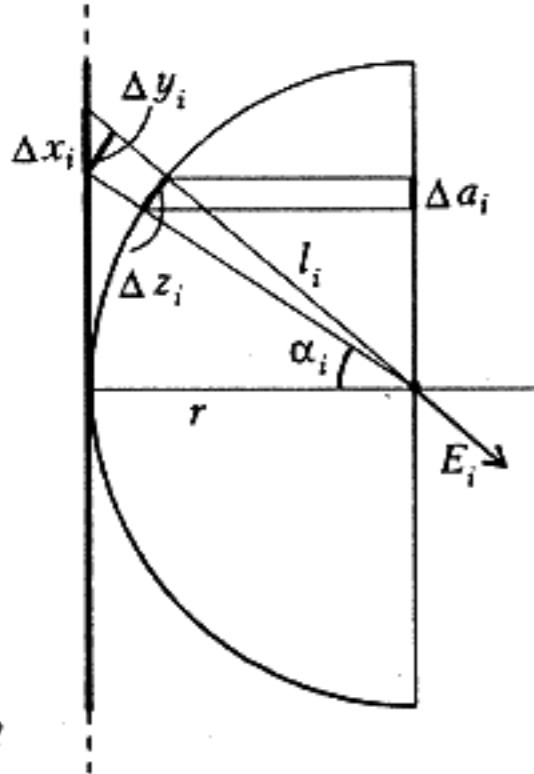


Рис. 2

Обозначим линейную плотность заряда нити через λ , а расстояние от точки наблюдения до нити — через r . Разобьем нить на маленькие кусочки и запишем принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i,$$

где

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 l_i^2}, \quad q_i = \lambda \Delta x_i, \quad l_i^2 = r^2 + x_i^2.$$

В этом случае при суммировании сократятся параллельные нити составляющие поля, и для модуля результирующего поля получим

$$E = \sum E_{i\perp} = \sum E_i \cos \alpha_i = \sum \frac{\lambda \Delta x_i}{4\pi\epsilon_0 l_i^2} \cos \alpha_i.$$

Такая сумма пугает обилием индексов « i », и за знак суммы можно вынести только λ . Однако расчет можно упростить, придав геометрический смысл оставшемуся выражению. Для этого проведем касающуюся нити окружность с центром в точке наблюдения. Тогда $\Delta y_i = \Delta x_i \cos \alpha_i$ (обозначения ясны из рисунка 2), $\Delta z_i = \Delta y_i r / l_i$, $r / l_i = \cos \alpha_i$ и

$$\begin{aligned} E &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum \frac{r \Delta y_i}{l_i} \frac{r}{l_i} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum \Delta z_i \cos \alpha_i = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sum \Delta a_i = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r^2} 2r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \end{aligned}$$

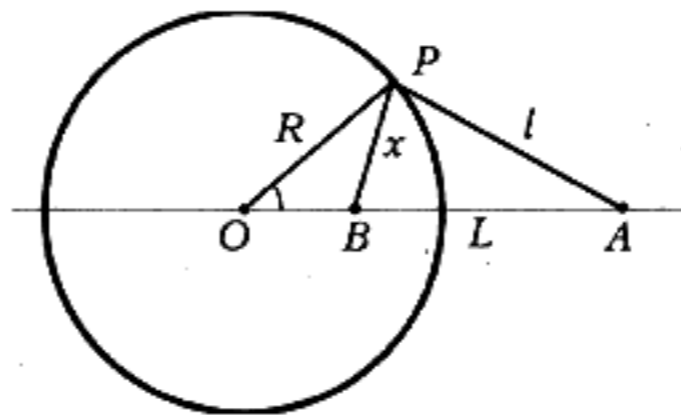


Рис. 3

Аналогично можно справиться с суммой, возникающей при вычислении поля равномерно заряженной плоскости.

Разрежем плоскость на тонкие параллельные полоски. Поле такой полоски мы только что вычислили. Если поверхностная плотность заряда на плоскости σ , а ширина полоски Δx , то заряд единицы длины полоски равен $\lambda = \sigma \Delta x$ и поле, создаваемое i -й полоской в точке наблюдения, равно

$$E_i = \frac{\sigma \Delta x_i}{2\pi\epsilon_0 l_i}.$$

Согласно принципу суперпозиции (обозначения см. на рисунке 2),

$$E = \sum E_i \cos \alpha_i = \sum \frac{\sigma \Delta x_i \cos \alpha_i}{2\pi\epsilon_0 l_i}.$$

Поскольку (аналогично предыдущему) $\Delta y_i = \Delta x_i \cos \alpha_i$ и $\Delta z_i = \Delta y_i r / l_i$, получаем

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \sum \frac{\Delta x_i \cos \alpha_i}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \sum \frac{\Delta y_i}{l_i} = \\ &= \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r} \sum \frac{\Delta y_i r}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r} \sum \Delta z_i = \\ &= \frac{\sigma r}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Упражнения

1. Найдите поле плоскости, разбивая ее не на полоски, а на кольца и используя результат задачи о поле кольца.
2. Найдите поле плоскости, разбивая ее на точечные заряды (вместо полуокружности придется взять полусферу).

Чтобы справиться с задачей нахождения поля заряженной сферы, понадобится немного геометрии.

Рассмотрим окружность с центром O и радиусом R и какую-нибудь точку A вне ее (рис.3). Точку B на луче OA , для которой $OA \cdot OB = R^2$, назовем сопряженной с точкой A . Она обладает многими замечательными свойствами. Для нас важно следующее: $OB/OP = OP/OA$. Треугольники POB и POA , кроме пропорциональных сторон, имеют еще общий угол, поэтому они подобны. Обозначив $OA = L$, $BP = x$, $PA = l$ и $OP = R$, имеем $R/L = x/l$. Из подобия

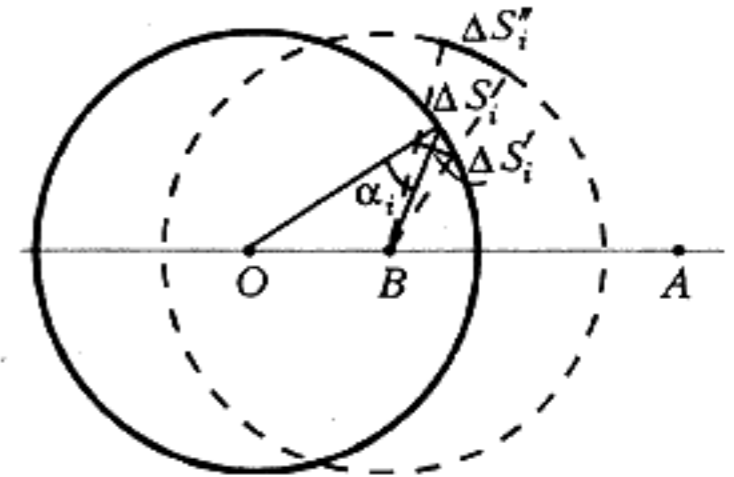


Рис. 4

также следует, что

$$\angle OPB = \angle PAO.$$

Теперь займемся собственно полем сферы. Если A — точка наблюдения, а σ — плотность заряда на сфере, то в обозначениях на рисунках 3 и 4 имеем

$$E = \sum \frac{\sigma \Delta S_i}{4\pi\epsilon_0 l_i^2} \cos \alpha_i.$$

Построим сферу того же радиуса с центром в точке B , сопряженной с A , и найдем площадь $\Delta S_i''$, которую закрывает на ней площадка ΔS_i , если смотреть из точки B :

$$\Delta S_i'' = \left(\frac{R}{x}\right)^2 \Delta S_i = \frac{R^2 \Delta S_i \cos \alpha_i}{x^2}.$$

Вспомнив, что $x/R = l/L$, получим

$$\Delta S_i'' = \frac{\Delta S_i \cos \alpha_i}{l_i^2} L^2$$

и найдем нужную нам сумму:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{\Delta S_i \cos \alpha_i}{l_i^2} = \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 L^2} \sum \Delta S_i'' = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\epsilon_0 L^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L^2}. \end{aligned}$$

Упражнение 3. Покажите, что внутри сферы поля нет.