

Живописна табличка простых делителей начальной последовательности составных репьюнитов:

$$\begin{aligned} 111 &= 3 \cdot 37, \\ 1111 &= 11 \cdot 101, \\ 11\ 111 &= 41 \cdot 271, \\ 111\ 111 &= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37, \\ 1\ 111\ 111 &= 239 \cdot 4649, \\ 11\ 111\ 111 &= 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137, \\ 111\ 111\ 111 &= 3 \cdot 37 \cdot 333667. \end{aligned}$$

В результате умножения $R_i \cdot R_j$ при $9 \geq i \geq j$ получается палиндромическое число вида $(12\dots j\dots 21)$ из $i + j - 1$ цифр с цифрой j посередине. (Палиндромом называется натуральное число, запись которого совпадает с записью своего зеркального отражения.)

Примеры:

$$\begin{array}{r} 11111 \\ \times 111 \\ \hline 1233321 \end{array} \quad 111^2 = 12\ 321.$$

Если $i \geq j > 9$, то $R_i \cdot R_j$ — не палиндром.

Задачи (из «семейной хроники» репьюнитов):

1. Какими цифрами следует заменить буквы, чтобы сумма девяти слагаемых стала равной репьюниту?

$$\begin{array}{r} \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ + \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \\ \text{РЕПЬЮНИТ} \end{array}$$

2. Произведением каких двух репьюнитов является число

$$123455554321?$$

3. В прошлом месяце сумма, вырученная фирмой от продажи партии новых мини-автомобилей, составила 1111111 долларов. Если каждый автомобиль имел одну и ту же цену, то сколько их было продано?

4. Какие цифры заменены буквами в десятичной записи произведения?

$$\begin{array}{r} \text{RRRRRRR} \\ \text{RRRRRRR} \\ \hline \text{REPUNITINUPER} \end{array}$$

5. Дайте рекуррентное определение репьюнита.

6. Являются ли взаимно простыми два репьюнита, номера (n) которых а) последовательные числа, б) последовательные нечетные числа, в) последовательные четные числа?

7. Какие репьюниты в системе счисления с четным основанием будут нечетными, а в системе счисления с нечетным основанием будут четными?

8. Когда к цифре 2 прижимаются n единиц слева и n единиц справа, то образуется палиндромическое число

$$\underbrace{11\dots 1}_{n \text{ единиц}} \underbrace{2}_{1 \text{ единица}} \underbrace{11\dots 1}_{n \text{ единиц}}$$

— репьюнит с проникшей в его сердцевину двойкой. Докажите, что при всяком значении n это число — не простое. Так, в частности, при $n = 1$ имеем

$$121 = 11 \cdot 11,$$

при $n = 2$ имеем

$$11211 = 111 \cdot 101.$$

