

2. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых все корни уравнения

$$2a(4^{x+2} + 1) - (64a^2 + 1)2^x = 0$$

являются целыми отрицательными числами.

3. Третий член арифметической прогрессии равен наибольшему значению функции  $y = 12x - x^3$  на отрезке  $[1; 3]$ , девятый член прогрессии равен наименьшему значению данной функции на указанном отрезке. Найдите разность прогрессии.

4. Найдите все корни уравнения

$$3\left(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{61\pi}{4}\right)\left(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \frac{61\pi}{4}\right)^{-1} + 2 \cos^2 x = \sin \frac{65\pi}{2},$$

удовлетворяющие неравенству

$$\frac{16x^3 + 8\pi x^2 + \pi^2 x}{x + 3\pi} < 0.$$

5. Длины сторон параллелограмма равны  $a$  и  $b$ , острый угол параллелограмма равен  $30^\circ$ . Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением параллелограмма вокруг стороны длины  $a$ .

#### Вариант 2

1. Упростите выражение для функции

$$f(x) = 1 + x(1 - x^7) + (x - 1)\left(1 - \frac{x^2}{1 + x + x^2 + x^3} - \frac{x^4}{(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)} - \frac{x}{1 + x}\right)^{-1}$$

и для каждого значения параметра  $a$  решите уравнение

$$\sqrt{a^2 x^2 + 4a \cdot f(x) + 4} + f(x) - 1 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{3 - 5^{\log_{25} 4} + \log_{0,04} x} + \sqrt{1 + 5^{\log_{25} 4} + \log_{0,2} x} \leq 1.$$

3. Сумма квадратов цифр некоторого положительного трехзначного числа равна 74. В этом числе цифра сотен равна удвоенной сумме цифр десятков и единиц. Найдите это число, если известно, что разность между ним и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 495.

4. Найдите все корни уравнения

$$\operatorname{tg} 2x \cdot \cos\left(\frac{9\pi}{2} - 2x\right) - 3 \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg} 2x \cdot \cos 2x = 0,$$

лежащие на отрезке

$$\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right].$$

5. Медиана, заключенная между двумя сторонами треугольника с длинами 54 и 58 соответственно, на 4 меньше полусуммы длин этих сторон. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

Публикацию подготовил  
В. Прохоренко

### Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена

#### МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Для каждого натурального  $n$  определена функция

$$f_n(x) = \frac{x - n}{x - 2} \cdot \sqrt{x^2 + 2nx + 4}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции  $f_2(x)$ .

3) Найдите точки пересечения графиков функций

$$f_3(x) \text{ и } g(x) = \frac{5}{4}(x^2 + 6x + 4).$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{3}}(1 + |x|) \cdot \log_2(1/2 + x) > 0.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\operatorname{tg}(\pi(1 + x)) = \frac{1 - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - \pi x\right)}{\sin(2\pi x)} + \sin(\pi(3 + x)),$$

принадлежащие промежутку  $[-1; 2]$ .

4. В трапеции  $ABCD$  основания  $AD = 30$ ,  $BC = 20$  и боковые стороны  $AB = 6$ ,  $CD = 8$ . Докажите, что прямая  $AB$  перпендикулярна прямой  $CD$ , и найдите площадь трапеции.

5. В основании четырехугольной пирамиды  $SABCD$  лежит ромб  $ABCD$  с диагоналями  $AC = c$  и  $BD = d$ . Грани  $SAD$  и  $SCD$  перпендикулярны плоскости основания пирамиды. Точки  $E$  и  $F$  лежат на серединах сторон ромба  $AD$  и  $DC$  (соответственно). Через вершину пирамиды  $S$  и точки  $E$ ,  $F$  проведена плоскость. Площадь полученного сечения равна  $q$ . Найдите объем пирамиды.

#### Вариант 2

1. Для каждого натурального  $n$  определена функция

$$f_n(x) = \log_3(x^2 + nx - 2n^2).$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции  $g(x) = 3^{f_3(x)-1}$ .

в) Пересекаются ли графики функций

$$f_2(x) \text{ и } h(x) = \log_3(x^2 - 9)?$$

2. Решите неравенство

$$|x^2 - 3| \cdot (3 - |2x - 1|) > 0.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\cos(\pi - 5x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\sin(\pi - 2x)} = 0,$$

принадлежащие промежутку  $\left[-\pi; \frac{2\pi}{3}\right]$ .

4. В трапеции  $ABCD$  известно, что  $AD \parallel BC$  ( $AD > BC$ ). Биссектриса угла  $BAD$  пересекает боковую сторону трапеции  $CD$  в точке  $E$ . Найдите площадь трапеции, если известно, что  $CE:ED = 1:3$ ,  $CD \perp AD$ ,  $BC = 6$ ,  $AB = 10$ .

5. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды равны между собой и равны  $a$ . Угол между равными сторонами треугольника, лежащего в основании, равен  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды.

Публикацию подготовили  
О. Корсакова, З. Новосельцева

### Санкт-Петербургский государственный технический университет

#### МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

#### Вариант 1

(физико-механический факультет)

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sin x}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3xy - 4x^3y^3 = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_{x+2} 3 \geq 1.$$

4. Найдите длину хорды, пересекающей две смежные стороны квадрата, вписанного в окружность с радиусом  $R$