

И Эдисон похвалил бы вас ...

Р. ВИНОКУР

ГРАЖДАНСКАЯ война между демократическим Севером и рабовладельческим Югом была довольно кровопролитной: погибли три четверти миллиона человек, совсем немало для того времени. После Гражданской войны начался стремительный промышленный подъем страны, прежде в основном аграрной, и талантливый самоучка-изобретатель Томас Альва Эдисон оказался, в соответствии с американской поговоркой, нужным человеком в нужном месте и в нужное время. Он работал много и упорно и стал автором 1093(!) изобретений, среди которых наиболее известны фонограф (первое устройство, записывающее и воспроизводящее звук) и электрическая лампочка. Однажды в Америку приехал талантливый сербский инженер Никола Тесла и был принят на работу в лабораторию Эдисона... Впрочем, основная цель нашего рассказа не вспомнить биографию «Великого Американца» (как часто называют Эдисона), а показать практическую эффективность даже совсем простых физико-математических моделей.

Инженерные науки считались важными еще в библейские времена (вспомните египетские пирамиды и финикийские корабли дальнего плавания), но получили основное развитие в последние полтора столетия. Что же касается инженерных инструментов, то здесь наблюдается еще более быстрый прогресс. Так, в начале своей карьеры (в 70-х годах) автор активно использовал для расчетов традиционную логарифмическую линейку и громоздкую (в целую комнату) вычислительную машину с ее бумажными перфолентами и перфокартами. Теперь инженеры применяют карманные калькуляторы и настольные компьютеры. Тем не менее, роль простых физико-математических моделей в инженерной практике столь же велика, как и во времена Эйлера и Ньютона. Такие модели помогают быстро получить необходимые для инженерного анализа результаты с достаточной для начального приближения точностью. Далее можно использовать компьютеры —

для детальных численных расчетов и приборы — для уточняющих измерений.

Рассмотрим в качестве примера тепловое равновесие электрической цепи. Практическая важность этой проблемы не вызывает сомнений: для прибора или устройства опасен даже перегрев, а ведь может возникнуть и пожар. Как известно, равновесие бывает устойчивым, неустойчивым и безразличным (нейтральным). Так, в механике устойчивое равновесие существует, если после прекращения действия внешних сил система неизменно возвращается в исходное положение равновесия (рис.1,а). Без-

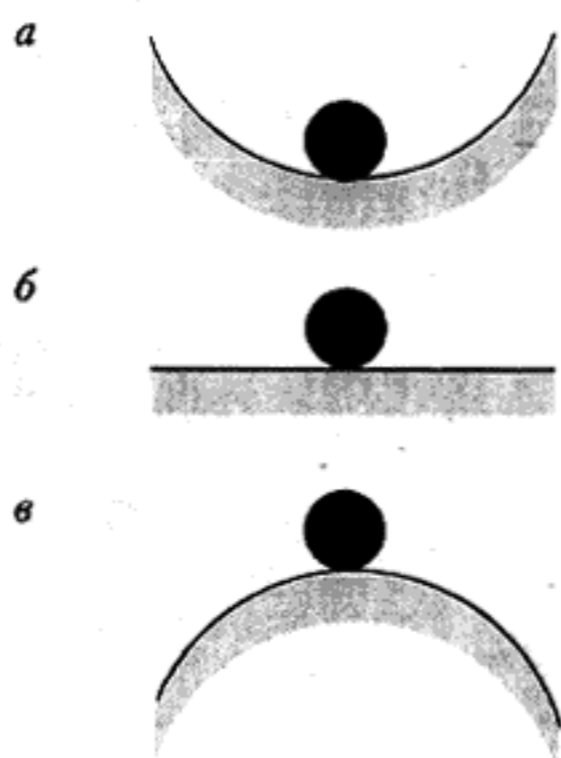


Рис.1

различное равновесие имеет место, если система, будучи выведенной из равновесия, остается в новом состоянии (рис.1,б). Наконец, даже слабый и короткий толчок уводит систему из неустойчивого положения равновесия (рис.1,в).

Возьмем простейшую электрическую цепь постоянного тока (рис.2): источник напряжением U и резис-

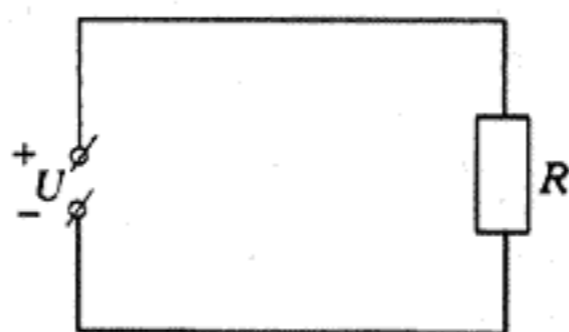


Рис.2

тор сопротивлением

$$R = R_0(1 + \alpha t), \quad (1)$$

где R_0 — электрическое сопротивление при температуре 0°C , t — температура по шкале Цельсия и, наконец, α — температурный коэффициент сопротивления. Для большинства проводников электрическое сопротивление растет с температурой ($\alpha > 0$). Например, температурные коэффициенты сопротивления чистых металлов (алюминия, меди, свинца, вольфрама и т.п.) положительны и равны примерно $0,004\ 1/^\circ\text{C}$. В случае таких сплавов, как манганин или константан, температурный коэффициент почти равен нулю. Для углерода и полупроводниковых материалов электрическое сопротивление уменьшается с ростом температуры ($\alpha < 0$). (Как химический элемент, углерод встречается в природе в виде кристаллических веществ: графита и алмаза. Аморфный углерод (разновидность графита, состоящего из микроскопических кристаллов) получается путем нагревания дерева, угля и других содержащих углерод материалов при ограниченном доступе кислорода, так что полного сгорания не происходит. Первые нити накала в электрических лампочках были целиком углеродными или с большим содержанием углерода.)

Линейное уравнение (1) не является фундаментальным физическим законом. Это лишь удобная приближенная зависимость, работающая в диапазоне практически важных температур. Например, если $\alpha > 0$ и $t < t_{\min} = -1/\alpha$, то, в соответствии с уравнением (1), электрическое сопротивление вообще является математически отрицательной величиной. Следовательно, при положительном коэффициенте сопротивления уравнение (1) не отражает реальных физических процессов, если температура меньше или близка к t_{\min} . Однако для металлов эта «пограничная» температура равна примерно $-1/0,004^\circ\text{C} = -250^\circ\text{C}$, т.е. почти совпадает с абсолютным нулем

($\approx -273^\circ\text{C}$). Если $\alpha < 0$ и $t > t_{\max} = 1/|\alpha|$, то уравнение (1) опять приводит к отрицательным значениям. Но для углерода, например, $\alpha = -0,0005 \text{ 1/}^\circ\text{C}$, значит, $t_{\max} \approx 2000^\circ\text{C}$ — скажем прямо, очень высокая температура. Таким образом, линейное соотношение (1) является вполне практичным.

Тепловое равновесие наступает, если тепловая энергия, выделяемая в единицу времени в электрической цепи, равна тепловой мощности, уходящей из резистора в окружающую среду. Для простоты полагаем, что уходящая мощность равна

$$P_{yx} = A(t - t_{\text{окр}}), \quad (2)$$

где $t_{\text{окр}}$ — температура окружающего воздуха, а коэффициент A — положительная постоянная величина, называемая коэффициентом теплоотдачи. Уравнение (2) является точным, если тепло отдается в среду путем конвекции (перемешивания нагретых и прохладных слоев воздуха). Такой механизм теплообмена преобладает, когда температура не очень высокая. В противном случае на первое место выходит тепловое излучение. Это совсем не плохо, а даже очень хорошо, иначе тепловая энергия Солнца не смогла бы достичь нашей планеты (из-за космического вакуума). Тем не менее, в данном случае простота математических выкладок важнее их абсолютной точности. Нам надо получить лишь качественные соотношения, поэтому не будем усложнять уравнение теплоотдачи, а наоборот еще более упростим его, предположив, что температура окружающего воздуха равна 0°C . Тогда

$$P_{yx} = At. \quad (2')$$

С другой стороны, тепловая мощность электрического тока, как известно, равна

$$P_r = \frac{U^2}{R}. \quad (3)$$

Используя выражения (1), (2') и (3), запишем уравнение теплового равновесия:

$$\frac{U^2}{R_0(1 + \alpha t)} = At, \quad (4)$$

которое легко преобразуется в экви-

валентное квадратное уравнение

$$\alpha t^2 + t - \frac{U^2}{R_0 A} = 0 \quad (5)$$

с двумя действительными решениями при условии $\alpha > 0$ (т.е. для металлов):

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\alpha U^2 / (R_0 A)}}{2\alpha}.$$

Решение t_2 (со знаком минус перед радикалом) является отрицательным (ниже условленной температуры окружающего воздуха), и здравый смысл подсказывает, что этим решением лучше пренебречь. Однако проведем более основательный анализ.

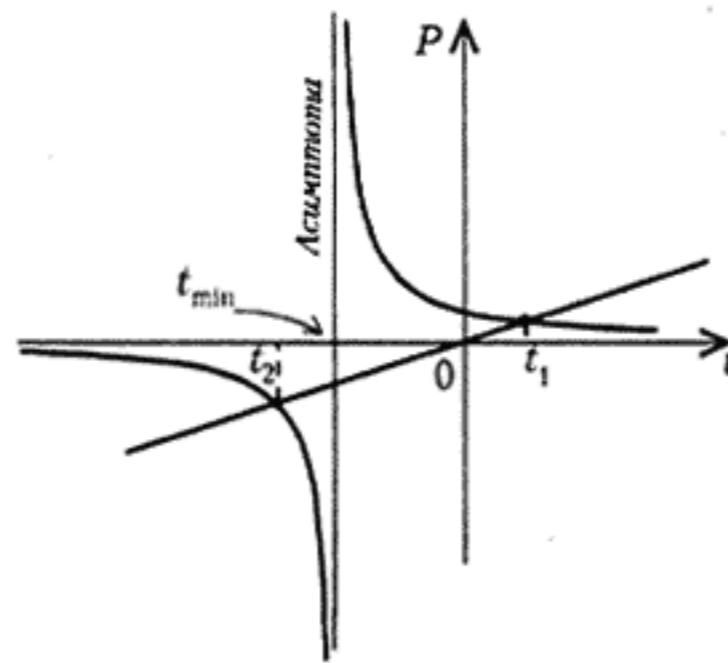


Рис. 3

Для этого решим уравнение (4) графически — в плоскости с прямоугольной системой координат t и P (рис.3, температура отложена по оси абсцисс, тепловая мощность — по оси ординат). Левая часть уравнения (4) — это гипербола (две ее ветви разделены асимптотой (в данном случае вертикальной прямой линией)). Правая часть уравнения (4) — прямая линия, проходящая через начало координат $(0, 0)$. Решениями являются две точки пересечения прямой с гиперболой. Их абсциссы соответствуют корням квадратного уравнения (5). Поскольку асимптота имеет абсциссу $t_{\min} = -\frac{1}{\alpha}$, то отрицательный корень (расположенный левее асимптоты) лишен физического смысла (исходное уравнение (1) в этом случае неверно).

Если $\alpha < 0$, то ситуация становится вполне экзотической. Так, уравнение (5) вообще не имеет действительных решений, если

$$D = \frac{4|\alpha|U^2}{R_0 A} > 1 \quad (6)$$

($|\alpha|$ — абсолютное значение величины α). С физической точки зрения это означает, что тепловое равновесие невозможно, так как электрически производимая тепловая мощность больше мощности, отдаваемой в окружающую среду. В результате температура резистора будет повышаться, пока он не расплавится. Чтобы избежать катастрофы (сделать безразмерный параметр D меньше 1), можно увеличить коэффициент теплоотдачи A . На практике это достигается с помощью принудительной вентиляции. Вот почему во многих электронных устройствах (например, компьютерах), где много полупроводниковых элементов, установлены внутренние вентиляторы. (Перед второй мировой войной полупроводники были курьезом, представляющим лишь исследовательский интерес. В начале 50-х годов, с открытием транзистора, они получили необычайно широкое применение.)

Перейдем теперь от «плохого» условия (6) к «хорошему» условию

$$D = \frac{4|\alpha|U^2}{R_0 A} < 1. \quad (7)$$

В этом случае уравнение (5) имеет два действительных положительных корня:

$$t_{2,1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - D}}{2|\alpha|}. \quad (8)$$

Интуиция подсказывает, что один из них не имеет практического значения. Опять — проблема выбора!

Заметим, что в этом и состоит основное отличие физика от «чистого» (не прикладного) математика. Первый знает, чем и когда пренебречь, чтобы быстро получить полезный результат. Второй «вынужден» долго искать точные решения.

Наш следующий шаг — проверить оба решения на устойчивость. Только устойчивое тепловое равновесие имеет практическое значение. На рисунке 4 кривая линия (гипербола) характеризует левую часть уравнения (4). Правая часть этого уравнения представлена тремя возможными прямыми, которые соответствуют случаям «сильной» (когда верно условие (7)) «средней» и «слабой» (условие (6)) теплоотдачи. Заметим, что асимптота здесь имеет абсциссу $t_{\max} = \frac{1}{|\alpha|}$, т.е. та часть координатной плоскос-

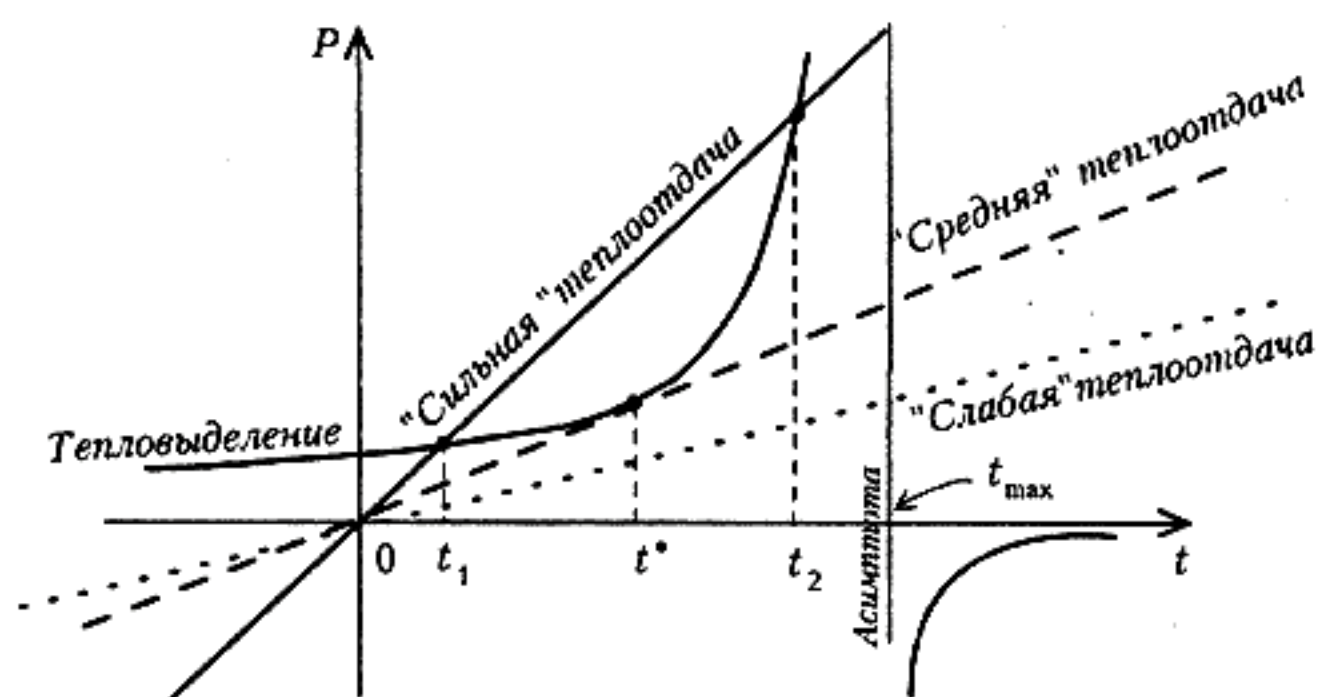


Рис. 4

ти, что находится справа от асимптоты, не имеет физического смысла.

Прямая «слабой» теплоотдачи всегда расположена ниже кривой тепловыделения, и поэтому пересечений в этом случае нет, что соответствует отсутствию решений уравнения (5) при «плохом» условии (6). Прямая «сильной» теплоотдачи пересекает кривую тепловыделения дважды: два решения существуют при «хорошем» условии (7). Давайте сначала рассмотрим устойчивость меньшего из них (t_1). Слева от него кривая тепловыделения расположена выше прямой, характеризующей теплоотдачу (см. рис.4), поэтому, если из-за какого-то кратковременного внешнего воздействия температура t вдруг понизится ($t < t_1$), резистор вновь начнет нагреваться до прежней температуры. Справа от точки t_1 , но левее точки t_2 кривая тепловыделения лежит ниже прямой, определяющей теплоотдачу, поэтому здесь преобладает охлаждающий фактор, «возвращающий» температуру к равновесному значению t_1 . Таким образом, это равновесие устойчивое. Справа от точки t_2 тепловыделение всегда выше теплоотдачи, и, попав в эту область, температура резистора будет продолжать увеличиваться. Значит, решение t_2 соответствует неустойчивому равновесию и поэтому не является практически возможным.

Прямая «средней» теплоотдачи здесь определена как касательная к кривой тепловыделения и соответствует «вырожденному» случаю $D = 1$, при котором существует лишь одно решение уравнения (5), а именно

$$t^* = \frac{1}{2\alpha}. \quad (9)$$

Понятно, что температура любого

устойчивого равновесия ниже t^* . Если резистор сделан из углерода ($\alpha = -0,0005 \text{ 1/}^\circ\text{C}$), то $t^* = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$. Конечно, при столь высокой температуре эффект излучения намного превышает конвекционную теплоотдачу, поэтому реальные температуры устойчивого равновесия могут быть выше в полтора-два раза. Однако даже $2000 \text{ }^\circ\text{C}$ еще не вполне достаточно, чтобы имитировать дневной свет, ведь температура поверхности Солнца гораздо выше ($6000 \text{ }^\circ\text{C}$). Температура вольфрамовой нити накала современной лампочки равна примерно $2700 \text{ }^\circ\text{C}$, но даже ее свет — желтое дневного. Что же касается чисто углеродных или покрытых углеродом нитей накала, то (в силу проведенного выше анализа) они светят хуже и к тому же легче перегорают (из-за наличия области неустойчивого равновесия).

Теперь пора вернуться к Эдисону и Тесла.

Пытаясь изобрести электрический свет, Эдисон перепробовал нити накала из многих материалов, но тепло, создаваемое электрическим током, превращало большинство этих нитей в золу. Только нити накала из платины оказались более устойчивыми, но... дорого стоили. В конце концов были выбраны нити на основе аморфного углерода, полученные путем специальной термической обработки палочек из бамбука. Такие лампочки появились в 1879 году, были не очень надежными и давали желтоватый свет. Лишь в 1910 году, с изобретением вольфрама, эти недостатки были в основном преодолены.

Простая физико-математическая модель, рассмотренная выше, немало помогла бы Эдисону в подборе материала для нити накала. Но, к сожалению,

«Великий Маг» (как часто и во многом справедливо называют Эдисона) честно признавал себя «нулем» в математике и теоретических дисциплинах. Вместо предварительных теоретических оценок он применял свой знаменитый «метод проб и ошибок», отнимающий много времени и денег. «Лучший способ что-то изобрести, — говорил он, — это перепробовать все, что только взбредет в голову.» Дипломированный электрический инженер Никола Тесла рассказывал как-то, что он неоднократно был «скорбным свидетелем» этой длительной эдисоновской процедуры, зная наверняка, что лишь немного теории и расчета избавило бы Эдисона от 90% трудоемкой работы.

Вскоре споры между двумя гениями развились до разногласий, и Тесла был уволен из лаборатории Эдисона. Прошло время. Однажды Эдисон и Тесла были выбраны кандидатами на то, чтобы разделить Нобелевскую премию по физике. Однако Тесла, по слухам, отверг это предложение по той причине, что он не считает Эдисона ни физиком, ни вообще ученым. В результате оба не получили Нобелевской премии...

Представьте теперь себя современником Эдисона. Похвалил бы он вас за теоретические оценки? Не спешите с ответом. Оказывается, даже упрямые люди меняют свои взгляды со временем (хотя бы частично). Однажды во время первой мировой войны, когда Эдисон работал в исследовательском секторе военного флота, он лично обратился к руководству с просьбой: «...нам здесь нужен математик на случай, если мы захотим что-то вычислить», и соответствующий специалист был принят на работу. Таким образом, на склоне лет Эдисон почти признал, что и теория нужна, а от признания до похвалы — один шаг.

А вы как считаете?

