

4. В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  лежит на  $AC$ , причем  $AD = 2DC$ . Точка  $E$  лежит на  $BC$ . Площадь треугольника  $ABD$  равна 3, площадь треугольника  $AED$  равна 1. Отрезки  $AE$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Найдите отношение площадей треугольников  $ABO$  и  $OED$ .

5. Решите уравнение

$$\begin{aligned} |1 + \cos(\pi\sqrt{x})| + |x^2 - 15x + 44| = \\ = 15x - x^2 - \cos(\pi\sqrt{x}) - 45. \end{aligned}$$

#### Вариант 5

(факультеты биологический и фундаментальной медицины)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2} \cdot \sin x + \sin 2x = 0.$$

2. Решите уравнение

$$(x-7)^2 - |x-7| = 30.$$

3. Найдите все значения  $x$ , удовлетворяющие неравенству

$$1 + \log_{\frac{1}{4}}(\log_3(4-x)) > 0.$$

4. Плоское сечение  $SAB$ , проходящее через вершину  $S$  прямого кругового конуса, имеет площадь  $42$  ( $\text{см}^2$ ). Точки  $A$  и  $B$ , лежащие на окружности основания конуса, делят ее длину в отношении  $1:5$ . Найдите объем конуса, если угол  $SAB$  равен  $\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{58}}\right)$ .

5. Найдите все пары натуральных чисел  $(t, u)$ , удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} 2 \cdot t + 47 < 22 \cdot u - 2 \cdot u^2, \\ 4 \cdot u \geq 7 \cdot t + 14. \end{cases}$$

#### Вариант 6

(факультет почвоведения)

1. Докажите, что число

$$\left( (\sqrt{3} - \sqrt{27})^2 + 7 \right) \cdot \left( (\sqrt{3} + \sqrt{27})^2 - 7 \right)$$

целое и найдите это число.

2. Решите неравенство

$$3x^4 + 4 < 13x^2.$$

3. Решите уравнение

$$x^{2\log_4 x} = \frac{8}{x^2}.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x + \sin x} = \sqrt{x - \sin 2x},$$

удовлетворяющие неравенству

$$-2\pi < x < 2\pi.$$

5. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 3$ ,  $AC = 3\sqrt{7}$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ . Биссектриса угла  $ABC$  продолжена до пересечения в точке  $D$  с окружностью, описанной вокруг треугольника. Найдите длину отрезка  $BD$ .

6. Определите, при каких значениях  $a$  решения неравенства

$$\sqrt{x+a} \geq x$$

образуют на числовой прямой отрезок длиной  $2|a|$ .

#### Вариант 7

(геологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x-5} = x-11.$$

2. Определите, какие из чисел  $-4$ ,  $-1$ ,  $1$ ,  $4$  являются решениями неравенства

$$\left| \frac{1}{2} - \log_{10} 5 \right| \cdot x \leq \frac{1}{2} - \log_{10} 5.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\cos 10x - \cos 8x}{2x^2 + \pi x - \pi^2} = \frac{\cos 6x - \cos 4x}{2x^2 + \pi x - \pi^2},$$

принадлежащие интервалу  $(0; \pi)$ .

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_9(-27x)} > \frac{1}{\log_3(-x)}.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy = 20y, \\ 5xy - 5y^2 = 4x. \end{cases}$$

6. В двух банках в конце года на каждый счет начисляется прибыль: в первом банке — 60% к текущей сумме на счете, во втором — 40% к текущей сумме на счете. Вкладчик в начале года часть имеющихся у него денег положил в первый банк, а остальные деньги — во второй банк, с таким расчетом, чтобы через два года суммарное количество денег на обоих счетах удвоилось. Какую долю денег вкладчик положил в первый банк?

7. В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AD$  перпендикулярна основаниям и имеет длину 9. Длина основания  $CD$  равна 12, а длина отрезка  $AO$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей трапеции, равна 6. Найдите площадь треугольника  $BOC$ .

8. Найдите все действительные значения параметра  $a$ , при которых для любого действительного  $b$  уравнение

$$\cos(b+ab+bx) + 2\cos b^2x = 3a^2$$

имеет хотя бы одно решение.

#### Вариант 8

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{33-8x} + x = 3.$$

2.  $f(x)$  — периодическая функция с периодом  $T = 1/3$ . Найдите значение  $f(1)$ , если известно, что

$$f^2(2) - 5f(10) + \frac{21}{4} = 0$$

и

$$4f^2(-1) - 4f\left(\frac{10}{3}\right) = 35.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{(\cos x)}(\sin x + \cos 2x) = 0.$$

4. Углы тупоугольного треугольника  $ABC$  удовлетворяют равенству  $\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$ . Найдите периметр этого треугольника, если известен радиус описанной окружности  $R$ , а один из углов равен  $\frac{\pi}{8}$ .

5. Даны два вектора

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \{b(a-2); (1-2b); -b(a-2)\} \text{ и} \\ \vec{v} &= \{a-2; b-2; -a\}. \end{aligned}$$

1) Найдите все значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых эти векторы будут коллинеарны, но не равны.

2) В случае  $b = a$  найдите все значения параметра  $a$ , при которых эти векторы взаимно перпендикулярны.

#### Вариант 9

(экономический факультет, отделения вечернее и менеджмента)

1. Решите неравенство

$$\log_4(3-3x)^2 \geq \log_2(x^2-1).$$

2. Решите систему

$$\begin{cases} x + 3^y = 2, \\ x^3 + 27^y = 26. \end{cases}$$

3. В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость и масса одного изделия составляют 400 тыс. р. и 12 кг для первого типа и 600 тыс. р. и 15 кг для второго типа. Общая масса изделий равна 321 кг. Определите минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость находящихся в контейнере изделий.

4. Решите уравнение

$$\sqrt[4]{12} \cdot \sin x = \sqrt{\sin 2x}.$$

5. Через точку  $A$ , находящуюся вне окружности на расстоянии 7 от ее центра, проведена прямая, пересекающая окружность в точках  $B$  и  $C$ . Найдите радиус окружности, если известно, что  $AB = 3$ ,  $BC = 5$ .